

А.В. Погорелов

ПОВЕРХНОСТИ
ОГРАНИЧЕННОЙ
ВНЕШНЕЙ
КРИВИЗНЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ПОВЕРХНОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО
ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени А. М. ГОРЬКОГО

Харьков

1956

Ответственный редактор —
проф. *Я. П. Бланк*

Техредактор *Н. А. Яновицкий*.
Корректор *В. М. Потапов*.

Подписано к печати 19/VII 1956 г. БЦ. 11917. Формат $84 \times 108^{1/32}$.
Объем 2 б. л., 6,56 п. л., 6,5 уч.-изд. л. В 1 печ. л. 40.000 зн.
Тираж 2.500. Зак. 559. Цена 3 р. 25 к.

Типография Издательства Харьковского университета
им. А. М. Горького, Харьков, Университетская, 16.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается специальный класс гладких поверхностей, которые мы называем поверхностями ограниченной внешней кривизны. Они выделяются из совокупности всех гладких поверхностей требованием ограниченности площади сферического изображения с учетом кратности.

Для построения содержательной теории поверхностей, подчиненных такому слабому условию регулярности как гладкость, требование ограниченности площади сферического изображения является естественным и в некотором смысле минимальным.

Как показал Нэш [4], риманова метрика, заданная на двумерном многообразии при весьма общих предположениях, допускает реализацию на гладкой поверхности трехмерного евклидова пространства. Более того, эта реализация осуществляется так же свободно, как топологическое погружение в пространство многообразия, на котором задана метрика. Из результатов Нэша следует, например, что в трехмерном евклидовом пространстве существует замкнутая поверхность без самопересечений, гомеоморфная тору, локально изометричная плоскости.

Совершенно ясно, что сохранить для гладких поверхностей даже со сколь угодно хорошей внутренней метрикой основную в теории поверхностей интегральную теорему о связи между внутренней и внешней кривизной в ее обычной формулировке невозможно. Регулярность внутренней метрики поверхности при наличии только гладкости не дает оснований для такого естественного заключения как локальная выпуклость при условии положительности гауссовой кривизны.

Все это делает необходимым наложить на поверхность другие ограничения, касающиеся ее внешней формы. Наиболее естественным и геометричным является требование ограниченности площади сферического изображения, которое позволяет просто и непосредственно определить важнейшее в теории поверхностей понятие кривизны.

Точное определение рассматриваемого класса поверхностей состоит в следующем. Пусть Φ — гладкая поверхность и $F_1, F_2, \dots, F_r$ — любые попарно не пересекающиеся замкнутые множества на ней. Сферическое изображение каждого множества F_s является также замкнутым множеством, а следовательно, имеет определенную площадь $\mu(\bar{F}_s)$ (лебегову меру). Поверхность Φ называется поверхностью ограниченной внешней кривизны, если

$$\mu(\bar{F}_1) + \mu(\bar{F}_2) + \dots + \mu(\bar{F}_r) < c(\Phi),$$

где $c(\Phi)$ — постоянная, не зависящая ни от множеств F_s , ни от их числа. Таким образом, это поверхность, у которой площадь сферического изображения с учетом кратности конечна.

Для поверхностей ограниченной внешней кривизны вводится понятие абсолютной внешней кривизны на произвольном множестве. Именно, если G — открытое множество, $F_1, F_2, \dots, F_r$ — замкнутые множества, содержащиеся в G и $\mu(\bar{F}_1), \mu(\bar{F}_2), \dots, \mu(\bar{F}_r)$ — площади их сферических изображений, то под абсолютной кривизной поверхности на множестве G понимаем

$$\sigma^0(G) = \sup_s \sum \mu(\bar{F}_s),$$

где $\sup$ берется по всем конечным системам замкнутых, попарно не пересекающихся множеств в G . Абсолютная кривизна на любом множестве H определяется равенством

$$\sigma^0(H) = \inf_{H \subset G} \sigma^0(G)$$

где $\inf$ берется по всем открытым множествам G , содержащим H . Очевидно, если поверхность регулярна (дважды дифференцируема), то

$$\sigma^0(H) = \int_H |k| ds,$$

где k — гауссова кривизна поверхности, а ds — элемент площади:

Определяемая указанным образом абсолютная кривизна поверхности обладает характерным для кривизны свойством полной аддитивности на кольце борелевских множеств.

Абсолютная кривизна поверхности допускает удобное во многих случаях интегральное представление для любого борелевского множества H :

$$\sigma^{\circ}(H) = \int_{\omega} n_H(X) dX,$$

где $n_H(X)$ — число точек в H , имеющих своим образом при сферическом отображении точку X единичной сферы ω , dX — элемент площади сферы, а интегрирование распространяется на всю сферу.

Точки поверхности ограниченной внешней кривизны подразделяются на регулярные и нерегулярные. Точка X называется регулярной, если в достаточно малой ее окрестности нет точек с касательными плоскостями, параллельными касательной плоскости в точке X . Остальные точки поверхности называются нерегулярными. Абсолютная кривизна поверхности на множестве нерегулярных точек равна нулю.

Регулярные точки поверхности в свою очередь подразделяются на эллиптические, гиперболические, параболические и точки уплощения в зависимости от характера пересечения касательной плоскости с поверхностью. Именно, если точка X имеет окрестность $U(X)$ на поверхности такую, что касательная плоскость в X имеет с $U(X)$ единственную общую точку — точку X , то эта точка называется эллиптической. Если касательная плоскость в точке X пересекает поверхность вблизи точки касания по двум простым кривым, исходящим из X , то X называется параболической точкой, если пересечение состоит из четырех кривых, то X называется гиперболической точкой. В остальных случаях регулярных точек пересечение касательной плоскости с поверхностью вблизи точки касания состоит из четного числа, большего четырех, простых кривых, исходящих из точки касания. Все такие точки называются

точками уплощения. Множество точек уплощения на поверхности не более чем счетно.

Приведенная классификация регулярных точек позволяет, естественно, определить понятие положительной, отрицательной и полной внешней кривизны поверхности на произвольном множестве. Именно, положительной (отрицательной) внешней кривизной поверхности на множестве H называется абсолютная кривизна поверхности на подмножестве эллиптических (гиперболических) точек H . Полная внешняя кривизна на множестве H определяется как разность между положительной и отрицательной кривизнами поверхности на этом множестве. Очевидно, если поверхность регулярна, то положительная, отрицательная и полная кривизны ее на множестве H соответственно равны:

$$\sigma^+(H) = \int_{H(k > 0)} k \, ds, \quad \sigma^-(H) = - \int_{H(k < 0)} k \, ds, \quad \sigma(H) = \int_H k \, ds,$$

где k — гауссова кривизна поверхности, ds — элемент площади, а интегрирование в первых двух формулах распространяется на подмножества H , где $k > 0$ и $k < 0$ соответственно.

Положительная, отрицательная и полная кривизны поверхности ограниченной внешней кривизны вполне аддитивны на кольце борелевских множеств поверхности.

Полная кривизна поверхности представляет собой алгебраическую площадь сферического изображения и для гомеоморфной кругу области G , ограниченной простой кривой γ с равной нулю абсолютной кривизной, допускает представление:

$$\sigma(G) = \int_{\omega - \bar{\gamma}} q_{\bar{\gamma}}(X) \, dX,$$

где $q_{\bar{\gamma}}(X)$ — степень точки X единичной сферы относительно кривой $\bar{\gamma}$ — сферического изображения кривой γ , т. е. число обходов этой точки при движении вдоль кривой $\bar{\gamma}$; dX — элемент площади сферы.

Внешняя форма поверхностей неотрицательной кривизны ($\sigma^- = 0$) и нулевой кривизны ($\sigma^- = \sigma^+ = 0$) выясняется следующими теоремами,

Поверхность нулевой кривизны развертывающаяся, т. е. локально изометрична плоскости, имеет обычное для регулярных развертывающихся поверхностей строение с прямолинейными образующими и стационарной касательной плоскостью вдоль каждой образующей.

Полная поверхность нулевой кривизны цилиндрическая.

Если плоскость α пересекает поверхность неотрицательной кривизны, то каждая из частей, на которые разбивает плоскость α поверхность с краем целиком лежащим в этой плоскости, есть выпуклая поверхность, т. е. область на границе выпуклого тела.

Полная поверхность с неотрицательной кривизной и положительной кривизной отличной от нуля, есть либо замкнутая выпуклая поверхность, либо бесконечная выпуклая поверхность.

Внутреннегеометрическое исследование поверхности ограниченной внешней кривизны, а также установление связи между внутренней метрикой поверхности и ее внешней формой оказывается возможным благодаря теореме о приближении такой поверхности регулярными. Именно:

Пусть Φ — поверхность ограниченной внешней кривизны и X — произвольная точка на ней. Тогда точка X имеет окрестность $U(X)$ такую, что существует последовательность регулярных, даже аналитических поверхностей Φ_n с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами, сходящаяся к Φ в $U(X)$ вместе со сферическими изображениями.

Эта теорема позволяет заключить, что поверхности ограниченной внешней кривизны суть многообразия ограниченной внутренней кривизны в смысле А. Д. Александрова [3].

Таким образом, для поверхностей ограниченной внешней кривизны определены понятия внутренней положительной (ω^+), отрицательной (ω^-) и полной (ω) кривизны. Для регулярных поверхностей связь между этими кривизнами и соответствующими внешними кривизнами устанавливается известной теоремой Гаусса. В случае поверхностей ограниченной внешней кривизны имеют место соответствующие теоремы.

Для любого борелевского множества H на поверхности ограниченной внешней кривизны

$$\omega^+(H) = \sigma^+(H), \quad \omega^-(H) \geq \sigma^-(H), \quad \omega(H) \leq \sigma(H).$$

Существует открытое множество G , содержащее все регулярные точки поверхности, такое, что для любого борелевского множества H из G

$$\omega^+(H) = \sigma^+(H), \quad \omega^-(H) = \sigma^-(H), \quad \omega(H) = \sigma(H).$$

Таким образом, равенство соответствующих внутренних и внешних кривизн не гарантируется только на множестве точек, абсолютная внешняя кривизна которого равна нулю.

Равенство внутренних и внешних кривизн имеет место для любого борелевского множества на замкнутой поверхности ограниченной внешней кривизны.

Неполнота результата в общем случае вызвана, по-видимому, не существом дела, а методом доказательства.

Приведенные выше теоремы, устанавливающие связь между внутренней и внешней кривизной, позволяют сделать некоторые заключения о форме поверхности ограниченной внешней кривизны на основе данных о ее внутренней метрике. Например, поверхность локально изометричная плоскости — линейчатая, касательная плоскость вдоль каждой прямолинейной образующей стационарна; если поверхность полная, то она цилиндрическая. Поверхность с неотрицательной внутренней кривизной и краем, лежащим в плоскости, выпуклая. Полная поверхность с неотрицательной (но не равной нулю) внутренней кривизной либо замкнутая выпуклая поверхность, либо бесконечная выпуклая поверхность.

Хотя кратко реферированные здесь результаты работы просты и естественны, доказательство их подчас далеко не так просто. Гладкая поверхность устроена довольно сложно. Результаты Нэша, как нам кажется, убедительно показывают, что ее исследование и не может быть очень простым, так как отказ от ограниченности внешней кривизны делает основные результаты просто неверными.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

§ 1. Абсолютная вариация непрерывного отображения

Поверхность Φ в трехмерном евклидовом пространстве мы будем называть *гладкой*, если в окрестности каждой своей точки при соответствующем выборе прямоугольных декартовых координат x, y, z она допускает задание уравнением:

$$z = \varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция с непрерывными первыми производными. Во всех случаях, если не оговорено противное, поверхность предполагается *открытой* в том смысле, что точки края поверхности не относятся к ней.

Множество H на поверхности будем называть *замкнутым*, если оно, как множество точек пространства, замкнуто. Открытые множества на поверхности определяются как дополнения к замкнутым.

Пусть Φ и $\bar{\Phi}$ — гладкие поверхности и f — непрерывное отображение поверхности Φ на $\bar{\Phi}$. Очевидно, каково бы ни было замкнутое множество F на поверхности Φ его образ $f(F)$ на поверхности $\bar{\Phi}$ является также замкнутым множеством, а следовательно, имеет определенную площадь (лебегову меру).

Отображение f поверхности Φ на поверхность $\bar{\Phi}$ мы будем называть *отображением ограниченной вариации*, если для любой конечной системы попарно не пересе-

кающихся замкнутых множеств $F_1, F_2, \dots, F_r$ на поверхности Φ сумма площадей их образов на $\bar{\Phi}$

$$\mu f(F_1) + \mu f(F_2) + \dots + \mu f(F_r)$$

ограничена постоянной, не зависящей от выбора множеств F_s и их числа.

Для непрерывных отображений ограниченной вариации вводим понятие *абсолютной вариации*. Пусть G — открытое множество на поверхности Φ . Абсолютной вариацией отображения f на G мы будем называть

$$\sup (\mu f(F_1) + \mu f(F_2) + \dots + \mu f(F_r))$$

по всем системам попарно не пересекающихся множеств $F_1, F_2, \dots, F_r$, содержащихся в G . Абсолютную вариацию отображения f на любом множестве H поверхности Φ определим как нижнюю грань абсолютных вариаций отображения f на открытых множествах, содержащих H , и будем обозначать $v^0(H)$.

Лемма. Пусть f — непрерывное отображение поверхности Φ на $\bar{\Phi}$ и H — множество на поверхности Φ . Тогда абсолютная вариация f на H не меньше площади образа H на $\bar{\Phi}$:

$$\mu f(H) \leq v^0(H).$$

Предполагается, что $f(H)$ имеет определенную площадь (измеримо).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай замкнутого множества H . Пусть G — любое открытое множество на Φ , содержащее H . Из определения абсолютной вариации f на открытом множестве очевидным образом следует

$$\mu f(H) \leq v^0(G).$$

Но абсолютная вариация f на H равна нижней грани абсолютных вариаций f на открытых множествах, содержащих H . Поэтому

$$\mu f(H) \leq v^0(H).$$

Теперь рассмотрим случай любого H . Пусть $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ — монотонно возрастающая последовательность замкнутых множеств на поверхности Φ , сходя-

щаяся к Φ (как множеству). Пусть $\bar{F}$ — замкнутое подмножество множества $f(H)$, причем такое, что

$$\mu f(H) - \mu \bar{F} < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Обозначим $\tilde{F}_k$ полный прообраз множества $\bar{F}$ в F_k .

Множество $\tilde{F}_k$, очевидно, замкнутое.

По доказанному

$$\mu f(\tilde{F}_k) \leq v^0(\tilde{F}_k).$$

Так как $\tilde{F}_k \subset H$, то

$$v^0(\tilde{F}_k) \leq v^0(H).$$

Поэтому

$$\mu f(\tilde{F}_k) \leq v^0(H).$$

Так как монотонно возрастающая последовательность замкнутых множеств $f(\tilde{F}_k)$ сходится в $\bar{F}$, то

$$\mu f(\tilde{F}_k) \rightarrow \mu \bar{F}.$$

Следовательно,

$$\mu \bar{F} \leq v^0(H).$$

Ввиду произвола ε , которым определяется множество $\bar{F}$, отсюда заключаем:

$$\mu f(H) \leq v^0(H).$$

Лемма доказана.

Теорема. Абсолютная вариация непрерывного отображения f поверхности Φ на поверхность $\tilde{\Phi}$ есть вполне аддитивная функция на кольце борелевских множеств поверхности Φ , т. е. для любых попарно не пересекающихся борелевских множеств $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$

$$v^0\left(\sum_k H_k\right) = \sum_k v^0(H_k).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что абсолютная вариация является внешней мерой Каратеодори, т. е. удовлетворяет условиям:

- 1) для любого H $v^0(H) \geq 0$;
- 2) $v^0(H_1) + v^0(H_2) = v^0(H_1 + H_2)$, если H_1 и H_2 находятся на положительном расстоянии друг от друга;
- 3) для любых $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$

$$v^0\left(\sum_k H_k\right) \leq \sum_k v^0(H_k).$$

Первое условие выполняется очевидным образом. Проверим второе условие, причем сначала рассмотрим случай открытых множеств. Пусть G_1 и G_2 не пересекающиеся открытые множества на поверхности Φ . Покажем, что

$$v^0(G_1) + v^0(G_2) = v^0(G_1 + G_2).$$

Пусть $F_1, F_2, \dots, F_n$ — любые замкнутые попарно не пересекающиеся множества, содержащиеся в $G_1 + G_2$. Каждое замкнутое множество F_k разбивается на два замкнутых подмножества F'_k и F''_k , одно из которых принадлежит G_1 (например, F'_k), а другое G_2 .

Имеем:

$$\sum_k \mu f(F'_k) \leq v^0(G_1),$$

$$\sum_k \mu f(F''_k) \leq v^0(G_2),$$

$$\sum_k \mu f(F_k) \leq \sum_k \mu f(F'_k) + \sum_k \mu f(F''_k),$$

Отсюда

$$\sum_k \mu f(F_k) \leq v^0(G_1) + v^0(G_2).$$

И так как множества $F_1, \dots, F_n$ взяты произвольно, то

$$v^0(G_1 + G_2) \leq v^0(G_1) + v^0(G_2).$$

Покажем теперь противоположное неравенство. Пусть $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ — любые замкнутые попарно не пересекающиеся множества в G_1 и $F''_1, F''_2, \dots, F''_m$ — любые замкнутые попарно не пересекающиеся множества в G_2 . Так как замкнутые множества F'_k, F''_k содержатся в $G_1 + G_2$ и попарно не пересекаются, то

$$\sum_k \mu f(F'_k) + \sum_k \mu f(F''_k) \leq v^0(G_1 + G_2).$$

Отсюда ввиду произвола множеств F'_k и F''_k заключаем:

$$v^0(G_1) + v^0(G_2) \leq v^0(G_1 + G_2).$$

Таким образом, для открытых не пересекающихся множеств G_1 и G_2 на поверхности Φ

$$v^0(G_1) + v^0(G_2) = v^0(G_1 + G_2).$$

Пусть теперь H_1 и H_2 — любые два множества на поверхности Φ , расстояние между которыми больше нуля. Покажем, что

$$v^0(H_1) + v^0(H_2) = v^0(H_1 + H_2).$$

Так как множества H_1 и H_2 находятся на положительном расстоянии, то существуют открытые не пересекающиеся множества G'_1 и G'_2 , содержащие H_1 и H_2 соответственно. Далее, из определения абсолютной вариации следует, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, всегда существуют открытые множества G'_1 , G'_2 и G'' , содержащие H_1 , H_2 и $H_1 + H_2$ соответственно такие, что

$$v^0(G'_1) - v^0(H_1) < \varepsilon,$$

$$v^0(G'_2) - v^0(H_2) < \varepsilon,$$

$$v^0(G'') - v^0(H_1 + H_2) < \varepsilon.$$

Определим теперь открытые множества G_1 и G_2 условиями

$$G_1 = G'_1 \cap G'_2 \cap G'',$$

$$G_2 = G'_2 \cap G'_1 \cap G''.$$

Очевидно, множества G_1 и G_2 не пересекаются, содержат H_1 и H_2 соответственно и

$$v^0(G_1) - v^0(H_1) < \varepsilon,$$

$$v^0(G_2) - v^0(H_2) < \varepsilon,$$

$$v^0(G_1 + G_2) - v^0(H_1 + H_2) < \varepsilon.$$

И так как по доказанному

$$v^0(G_1) + v^0(G_2) = v^0(G_1 + G_2),$$

а ε произвольно, то

$$v^0(H_1) + v^0(H_2) = v^0(H_1 + H_2).$$

Второе условие проверено полностью.

Проверим, наконец, третье условие, причем сначала рассмотрим случай открытых множеств. Итак, пусть

$\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_n, \dots$ — любые открытые множества на поверхности Φ . Покажем, что

$$v^0\left(\sum_k G_k\right) \leq \sum_k v^0(G_k).$$

Возьмем в $G = \sum_k G_k$ произвольную конечную систему попарно не пересекающихся замкнутых множеств $F_1, F_2, \dots, F_r$. Определим в каждом множестве G_i множества F_k^i условием

$$F_k^i = G_i \cap F_k.$$

Так как множества F_k^i , содержащиеся в G_i , находятся на положительном расстоянии друг от друга, то из второго условия, справедливость которого уже установлена, следует:

$$\sum_k v^0(F_k^i) = v^0\left(\sum_k F_k^i\right) \leq v^0(G_i).$$

Далее, очевидно,

$$\mu f(F_k) \leq \sum_i \mu f(F_k^i).$$

По лемме

$$\mu f(F_k^i) \leq v^0(F_k^i).$$

Суммируя это неравенство по i и сравнивая с предыдущим, получаем:

$$\mu f(F_k) \leq \sum_i v^0(F_k^i).$$

Суммируя теперь по k и вспоминая, что

$$\sum_k v^0(F_k^i) \leq v^0(G_i),$$

получаем:

$$\sum_k \mu f(F_k) \leq \sum_i v^0(G_i).$$

Отсюда в силу произвола попарно не пересекающихся множеств F_k следует:

$$v^0\left(\sum_k G_k\right) \leq \sum_k v^0(G_k).$$

Покажем теперь, что третье условие выполняется для любых множеств $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$. Определим открытые множества $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ условиями:

$$H_k \subset G_k, \quad v^0(G_k) - v^0(H_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$G = G_1 + G_2 + \dots,$$

Так как

$$\sum_k H_k \subset G$$

и, следовательно,

$$v^0\left(\sum_k H_k\right) \leq v^0(G),$$

а по доказанному

$$v^0(G) \leq \sum_k v^0(G_k),$$

то

$$v^0\left(\sum_k H_k\right) \leq \sum_k v^0(H_k) + 2\varepsilon.$$

Ввиду произвола ε отсюда получаем:

$$v^0\left(\sum_k H_k\right) \leq \sum_k v^0(H_k).$$

Таким образом, для абсолютной вариации выполняются все условия, которыми определяется внешняя мера Каратеодори. Отсюда следует, что абсолютная вариация является вполне аддитивной функцией на кольце борелевских множеств поверхности Φ .

§ 2. Функция кратности непрерывного отображения

Пусть f — непрерывное отображение поверхности Φ на поверхность $\bar{\Phi}$ и H — любое множество на поверхности $\bar{\Phi}$. Определим функцию $n_H(Y)$ точки Y на поверхности $\bar{\Phi}$ следующими условиями. Если число прообразов Y в H конечно, то полагаем $n_H(Y)$ равной числу прообразов, если же число прообразов Y в H бесконечно, то полагаем $n_H(Y)$ равной нулю. Опреде-

ляемую этими условиями функцию $n_H(Y)$ будем называть *функцией кратности* непрерывного отображения f на множестве H . В настоящем параграфе будет дано выражение для абсолютной вариации отображения f с помощью интеграла от функции кратности по площади поверхности Φ .

Лемма 1. *Абсолютная вариация непрерывного отображения на любом борелевском множестве H равна точной верхней грани абсолютных вариаций этого отображения на замкнутых множествах, содержащихся в H .*

Доказательство. Из определения абсолютной вариации для любого множества H следует существование открытого множества G , содержащего H , и такого, что

$$v^0(G) - v^0(H) < \varepsilon.$$

По определению вариации на открытом множестве G в нем найдется конечное число попарно не пересекающихся замкнутых множеств F_k таких, что

$$v^0(G) - \sum_k \mu f(F_k) < \varepsilon.$$

Обозначим $\tilde{F}_k$ ту часть множества F_k , которая лежит вне H . Абсолютная вариация на множестве $\sum_k \tilde{F}_k$ меньше ε , так как оно содержится в $G - H$. Отсюда следует существование открытого множества $\tilde{G}$, содержащего $\sum_k \tilde{F}_k$, и такого, что абсолютная вариация на нем меньше ε . Обозначим F'_k ту часть множества F_k , которая принадлежит $\tilde{G}$, а $F''_k = F_k - F'_k$. Множества F''_k очевидно, замкнутые и содержатся в H . Утверждается, что

$$v^0(G) - v^0\left(\sum_k F''_k\right) < 2\varepsilon,$$

а следовательно,

$$v^0(H) - v^0\left(\sum_k F''_k\right) < 2\varepsilon.$$

Действительно,

$$v^0\left(\sum_k F_k\right) = v^0\left(\sum_k F_k'\right) + v^0\left(\sum_k F_k''\right).$$

Но левая часть равенства отличается от $v^0(G)$ не более, чем на ε , так как

$$\sum_k \mu f(F_k) \leq v^0\left(\sum_k F_k\right) \leq v^0(G),$$

и

$$v^0(G) - \sum_k \mu f(F_k) < \varepsilon,$$

а первый член правой части не превосходит ε , так как

$\sum_k F_k' \subset \tilde{G}$ и $v^0(\tilde{G}) < \varepsilon$. Утверждение доказано. Итак, ка-

ково бы ни было $\varepsilon > 0$, всегда существует такое замкнутое множество F , содержащееся в H , что

$$v^0(H) - v^0(F) < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Каково бы ни было борелевское множество H , функция кратности $n_H(Y)$ измерима.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай замкнутого множества H . Обозначим M^k множество тех точек поверхности $\bar{\Phi}$, каждая из которых имеет в H не менее k прообразов. Доказать измеримость функции $n_H(Y)$ это значит доказать измеримость множеств M^k .

Пусть M_n^k множество точек поверхности $\bar{\Phi}$, у каждой из которых есть k прообразов в H , находящихся на расстоянии не меньше $1/n$ друг от друга. Множества M_n^k , очевидно, замкнутые и

$$\sum_n M_n^k = M^k,$$

Отсюда следует, что множество M^k есть множество типа F_σ , в частности измеримо.

Рассмотрим теперь случай открытого множества H . Пусть $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ монотонно возрастающая последовательность замкнутых множеств такая, что

$$H = F_1 + F_2 + \dots + F_n + \dots$$

Определим множества $M_{s,n}^k$ на поверхности $\bar{\Phi}$. Именно, точку Y поверхности $\bar{\Phi}$ отнесем множеству $M_{s,n}^k$, если она имеет в F_s по крайней мере k прообразов, находящихся друг от друга на расстоянии не меньшем $1/n$. Множества $M_{s,n}^k$ замкнутые и

$$\sum_{s,n} M_{s,n}^k = M^k.$$

Отсюда следует, что и в этом случае M^k является множеством типа F_σ , а следовательно, измеримо.

Рассмотрим, наконец, случай любого борелевского множества H . По определению абсолютной вариации на множестве H и по лемме 1 найдется открытое множество G , содержащее H , и замкнутое множество F , содержащееся в H , такие, что

$$v^0(G) - \varepsilon < v^0(H) < v^0(F) + \varepsilon,$$

каково бы ни было заданное $\varepsilon > 0$. Имеем:

$$M^k(F) \subset M^k(H) \subset M^k(G).$$

По доказанному множества $M^k(F)$ и $M^k(G)$ измеримы. Поэтому, чтобы доказать измеримость $M^k(H)$, достаточно показать, что мера множества $M^k(G) - M^k(F)$ сколь угодно мала, если достаточно мало ε .

Если точка Y принадлежит множеству $M^k(G) - M^k(F)$, то это значит, что она имеет прообраз в $G - F$. Поэтому

$$M^k(G) - M^k(F) \subset f(G - F).$$

Отсюда

$$\mu(M^k(G) - M^k(F)) \leq \mu f(G - F) \leq v^0(G - F) < 2\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть G — открытое множество на поверхности Φ и M — любое измеримое множество на поверхности $\bar{\Phi}$. Пусть каждая точка M имеет в G по крайней мере p прообразов. Обозначим $\tilde{M}$ полный прообраз M в G . Тогда, если $\mu(M) > t$, то

$$tp \leq v^0(\tilde{M}).$$

Доказательство. Обозначим M_n подмножество множества M , у каждой точки которого есть p прообразов

в G , находящихся на расстоянии не меньшем $\frac{1}{n}$ друг от друга. Очевидно, чтобы доказать утверждение леммы для множества M , достаточно доказать его для множеств M_n , так как

$$\mu(M_n) \rightarrow \mu(M) \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ а } v^0(\tilde{M}_n) \leq v^0(\tilde{M}).$$

Таким образом, можно считать, что каждая точка M имеет p прообразов в G , находящихся на расстоянии, не меньшем $\delta > 0$.

Пусть $\{A_k\}$ счетное покрытие G попарно не пересекающимися множествами типа F_σ диаметра меньше δ .

Обозначим $\tilde{m}_k$ ту часть множества $\tilde{M}$, которая принадлежит A_k , а m_k — ее образ на поверхности Φ . Очевидно, множества m_k измеримы и сумма их равна M .

Образуем множества $m_{i_1, i_2, \dots, i_p}$:

$$m_{i_1, i_2, \dots, i_p} = m_{i_1} \cap m_{i_2} \cap \dots \cap m_{i_p},$$

где все индексы $i_1, i_2, \dots, i_p$ различны. Очевидно, каждая точка X из M принадлежит по крайней мере одному из этих множеств, так как она имеет p прообразов, находящихся друг от друга на расстоянии не меньшем δ ,

т. е. большем диаметра любого множества $\tilde{m}_k$.

Построим теперь измеримые множества $n_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ так, чтобы они попарно не пересекались и чтобы

$$n_{i_1, i_2, \dots, i_p} \subset m_{i_1, i_2, \dots, i_p},$$

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} n_{i_1, i_2, \dots, i_p} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} m_{i_1, i_2, \dots, i_p}.$$

Очевидно, множества $n_{i_1, \dots, i_p}$ образуют покрытие M . Поэтому

$$m < \sum_{i_1, \dots, i_p} \mu n_{i_1, \dots, i_p}.$$

Так как каждое множество $n_{i_1, \dots, i_p}$ содержится в p множествах $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_p}$, то

$$\sum_k \mu(m_k) > mp.$$

Но

$$\sum_k \mu(m_k) \leq v^0(\tilde{M}).$$

Следовательно,

$$tr \leq v^0(\tilde{M}).$$

Лемма доказана.

Следствие. Площадь множества точек поверхности Φ , имеющих бесконечное число прообразов на Φ , равна нулю.

Теорема. Для любого борелевского множества H , на поверхности Φ имеет место равенство:

$$v^0(H) = \int_{\overline{\Phi}} n_H(Y) dY,$$

где dY — элемент площади поверхности $\overline{\Phi}$.

Доказательство. По лемме 2 функция $n_H(Y)$ измерима. Покажем, что она суммируема. Для этого заметим прежде всего, что $n_H(Y) \leq n_\Phi(Y)$ при любом H . Поэтому достаточно показать суммируемость функции $n_\Phi(Y)$.

Пусть N^k — множество тех точек поверхности $\overline{\Phi}$, каждая из которых имеет на Φ ровно k прообразов. Множество N^k представимо в виде разности двух множеств типа F_σ . Именно $N^k = M^k - M^{k+1}$, где M^k — множество тех точек поверхности $\overline{\Phi}$, каждая из которых имеет на Φ не менее k прообразов. Очевидно, полный прообраз $\tilde{N}^k$ множества N^k на Φ допускает такое же представление, в частности, является борелевским множеством. Имеем:

$$\int_{\overline{\Phi}} n_\Phi(Y) dY = \sum_k k \mu(N^k).$$

Но по лемме 3

$$k \mu(N^k) \leq v^0(\tilde{N}^k).$$

Отсюда в силу полной аддитивности абсолютной вариации получаем:

$$\int_{\overline{\Phi}} n_\Phi(Y) dY \leq v^0(\Phi),$$

т. е. функция $n_{\Phi}(Y)$ суммируема, а вместе с ней суммируема функция $n_H(Y)$, каково бы ни было борелевское множество H .

Рассмотрим теперь функцию множеств $w(H)$ на поверхности Φ :

$$w(H) = \int_{\Phi} n_H(Y) dY.$$

Она вполне аддитивна на кольце борелевских множеств. Действительно, пусть $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ попарно не пересекающиеся борелевские множества. Покажем, что

$$w\left(\sum_k H_k\right) = \sum_k w(H_k).$$

Во-первых, заметим, что

$$w(H_1 + H_2 + \dots + H_n) = w(H_1) + w(H_2) + \dots + w(H_n).$$

Это очевидным образом следует из свойств функции кратности для попарно не пересекающихся множеств. Именно, если число прообразов точки Y на поверхности Φ конечно, то

$$n_{H_1 + \dots + H_n}(Y) = n_{H_1}(Y) + \dots + n_{H_n}(Y),$$

а площадь множества точек, имеющих бесконечное число прообразов, равна нулю.

Обозначим

$$H^k = \sum_1^k H_i \quad \text{и} \quad H = \sum_1^{\infty} H_i.$$

Тогда утверждение о полной аддитивности w сводится к доказательству равенства

$$\int_{\Phi} n_H(Y) dY = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Phi} n_{H^k}(Y) dY.$$

Так как $n_{H^k}(Y)$ монотонно возрастает на множестве полной меры, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Phi} n_{H^k}(Y) dY = \int_{\Phi} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} n_{H^k}(Y) \right) dY.$$

Отсюда следует, что для полной аддитивности w доста-

точно показать, что функции $n_H(Y)$ и $\lim n_{H^k}(Y)$ могут отличаться только на множестве нулей площади.

Допустим на множестве M

$$n_H(Y) > \lim_{k \rightarrow \infty} n_{H^k}(Y).$$

Очевидно, тогда при любом k

$$n_H(Y) > n_{H^k}(Y).$$

Число прообразов точки $Y \subset M$ в H не может быть конечным, ибо тогда при достаточно большом k

$$n_H(Y) = n_{H^k}(Y),$$

а множество точек, имеющих бесконечное число прообразов на Φ , имеет нулевую площадь. Таким образом, почти всюду на Φ

$$n_H(Y) = \lim_{k \rightarrow \infty} n_{H^k}(Y)$$

и, следовательно, функция множеств $w(H)$ вполне аддитивна.

Известно, что если две вполне аддитивные функции на кольце борелевских множеств равны для любых открытых множеств, то они равны и для любых борелевских множеств. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого открытого множества G

$$v^0(G) = w(G).$$

Во-первых, заметим, что

$$w(G) \leq v^0(G).$$

Это неравенство для случая $G = \Phi$ получено выше. Для любого открытого множества G оно получается дословно так же.

Покажем теперь, что

$$w(G) \geq v^0(G).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $F_1, F_2, \dots, F_n$ — система замкнутых попарно не пересекающихся множеств в G такая, что

$$v^0(G) - \sum_k \mu f(F_k) < \varepsilon,$$

В силу аддитивности функции w

$$w(G) \geq w(F_1) + \dots + w(F_n).$$

А из определения функции w следует, что

$$w(F_k) \geq \mu f(F_k).$$

Поэтому

$$w(G) \geq \sum_k \mu f(F_k) \geq v^0(G) - \varepsilon.$$

И так как ε произвольно, то

$$w(G) \geq v^0(G).$$

Сопоставляя это неравенство с полученным выше, заключаем:

$$w(G) = v^0(G).$$

Теорема доказана.

В заключение отметим следующую лемму.

Лемма 4. *Каково бы ни было множество H на поверхности Φ , если его образ на поверхности $\bar{\Phi}$ при отображении f имеет равную нулю площадь, то абсолютная вариация f на H равна нулю.*

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ — монотонно убывающая последовательность открытых множеств на $\bar{\Phi}$, содержащих $f(H)$, такая, что

$$\mu G_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Обозначим $\tilde{G}_n$ полный прообраз G_n на Φ . $\tilde{G}_n$ — открытое множество, содержащее H . По теореме

$$v^0(G_n) = \int_{\bar{\Phi}} n_{\tilde{G}_n}(Y) dY.$$

При $n \rightarrow \infty$ $v^0(\tilde{G}_n)$ монотонно убывают, а так как все $\tilde{G}_n$ содержат H , то

$$v^0(H) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v^0(\tilde{G}_n).$$

Так как функции $n_{\tilde{G}_n}(Y)$ монотонно убывают при $n \rightarrow \infty$ на множестве полной меры, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^0(\tilde{G}_n) = \int_{\tilde{\Phi}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n_{\tilde{G}_n}(Y) \right) dY.$$

Но функция

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n_{\tilde{G}_n}(Y)$$

отлична от нуля только на множестве точек нулевой площади.

Поэтому

$$v^0(\tilde{G}_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$v^0(H) = 0$$

Лемма доказана.

§ 3. Индекс точки относительно непрерывного отображения

Гладкая поверхность Φ называется *ориентируемой*, если на ней может быть задана вектор-функция $n(X)$ точки поверхности, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $|n(X)| = 1$;
- 2) $n(X)$ — непрерывна;

3) вектор $n(X)$ перпендикулярен к касательной плоскости поверхности в точке X .

Если на поверхности Φ задана функция $n(X)$, то будем говорить, что поверхность ориентирована. Очевидно, ориентируемая поверхность допускает две ориентации. Если одна из них задается вектор-функцией $n(X)$, то вторая — вектор-функцией $-n(X)$.

Если поверхность Φ ориентирована, то на каждой простой кривой γ , ограничивающей гомеоморфную кругу область на поверхности, может быть указано направление обхода так, что будут выполняться следующие условия:

- 1) если области G_1 и G_2 , ограничиваемые кривыми γ_1 и γ_2 , не пересекаются, но кривые γ_1 и γ_2 имеют общий отрезок γ_{12} , то при указанном обходе кривых γ_1 и γ_2 отрезок γ_{12} проходится в противоположных направлениях;
- 2) если γ — малый простой контур, охватывающий

точку X , то направление обхода кривой γ и направление нормали $n(X)$ образуют „правый винт“.

Относительно определяемого таким образом обхода кривых на поверхности Φ мы будем говорить, что он индуцируется ориентацией поверхности.

Заметим, что ориентируемость поверхности можно определить так же, как возможность задать на всех простых кривых поверхности, ограничивающих гомеоморфные кругу области, направления обхода, удовлетворяющие первому из указанных выше условий. Из этого определения видно, что свойство поверхности быть ориентируемой инвариантно относительно топологических преобразований поверхности, т. е. поверхности гомеоморфные ориентируемой, ориентируемы. Плоскость, очевидно, ориентируема.

Пусть на ориентированной плоскости дана ориентированная кривая γ (т. е. кривая с заданным на ней направлением обхода) и A — точка, не лежащая на кривой. Пусть X_0 — произвольная точка кривой γ . Определим на кривой γ функцию $\vartheta(X)$ точки X следующими условиями:

1) $\vartheta(X)$ непрерывна на множестве точек кривой, кроме точки X_0 ;

2) $\vartheta(X)$ с точностью до кратного 2π равна углу, который образует полупрямая AX , идущая из точки A в точку X кривой с начальной полупрямой AX_0 .

Оказывается, функция $\vartheta(X)$ условиями 1, 2 определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого, кратного 2π . Изменение функции $\vartheta(X)$ при прохождении точки X_0 кривой, деленное на 2π , называется *степенью* точки A относительно кривой γ . Мы будем обозначать ее $q_\gamma(A)$. Степень точки есть целое число. Она не зависит от случайного выбора точки X_0 на кривой.

Наглядно степень точки A относительно кривой γ надо представлять себе как число обходов вокруг точки A при движении вдоль кривой γ в указанном направлении, считая это число положительным, если ориентация кривой γ совпадает с той, которая индуцируется ориентацией плоскости, и отрицательным в противоположном случае.

Если кривая γ испытывает непрерывную деформацию, но так что все время точка A находится вне кривой,

то степень точки A относительно кривой γ не изменяется. Точно так же при непрерывном изменении положения точки A вне кривой степень ее относительно кривой не изменяется.

Если степени точки A относительно кривых γ_1 и γ_2 одинаковы, то одну кривую можно непрерывно деформировать в другую, причем ни в какой момент деформации кривая не будет проходить через точку A .

Пусть P и Q — две произвольные точки замкнутой ориентированной кривой γ . Они разбивают кривую γ на две части. Обозначим их γ_1 и γ_2 . Пусть $\bar{\gamma}$ — произвольная кривая, соединяющая точки P и Q . Кривые γ_1 и $\bar{\gamma}$, γ_2 и $\bar{\gamma}$ образуют два замкнутых контура $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$. Ориентируем их соответственно обходу их частей γ_1 и γ_2 на кривой γ . Тогда степень любой точки A , не принадлежащей кривым γ и $\bar{\gamma}$, относительно контура γ равна сумме степеней ее относительно контуров $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$, т. е.

$$q_{\gamma}(A) = q_{\tilde{\gamma}_1}(A) + q_{\tilde{\gamma}_2}(A).$$

Понятие степени точки относительно замкнутого контура естественно переносится на случай любой поверхности гомеоморфной плоскости. Именно, пусть Φ — ориентированная гомеоморфная плоскости поверхность, γ — ориентированный контур на ней и A — точка поверхности, лежащая вне контура γ . Пусть f — гомеоморфизм поверхности Φ на плоскость. Ориентируем плоскость и кривую $f(\gamma)$ соответственно ориентации поверхности Φ и кривой γ . Назовем степенью точки A относительно контура γ на поверхности Φ степень точки $f(A)$ относительно контура $f(\gamma)$ на плоскости. Оказывается, так определяемая степень точки относительно замкнутого контура на поверхности не зависит от случайного выбора гомеоморфизма f .

Пусть Φ и $\bar{\Phi}$ — гладкие, гомеоморфные плоскости, ориентированные поверхности и f — непрерывное отображение поверхности Φ на поверхность $\bar{\Phi}$. Точку X поверхности Φ мы будем называть *регулярной* относительно отображения f , если у нее есть окрестность такая, что для всякой точки Y , отличной от X , из этой окрестности $f(Y) \neq f(X)$. Определяемую этим свойством

гомеоморфную кругу окрестность будем называть *нормальной*. Очевидно, каждая регулярная точка имеет нормальную окрестность.

Пусть X — регулярная точка поверхности Φ относительно отображения f и ω ее нормальная окрестность. Возьмем в окрестности ω произвольную ориентированную кривую γ , не проходящую через точку X , относительно которой степень точки X равна $+1$. Степень точки $f(X)$ относительно кривой $f(\gamma)$ мы будем называть *индексом* точки X относительно отображения f и обозначать $j(X)$. Понятие индекса не зависит ни от окрестности ω , ни от выбора кривой γ в ней. Покажем это.

Пусть ω_1 и ω_2 — две нормальные окрестности точки X , γ_1 и γ_2 — замкнутые ориентированные кривые в этих окрестностях такие, что

$$q_{\gamma_2}(X) = +1, \quad q_{\gamma_1}(X) = +1.$$

Надо показать, что

$$q_{f(\gamma_1)}(f(X)) = q_{f(\gamma_2)}(f(X)).$$

Непрерывной деформацией внутри $\omega_2 - X$ кривую γ_2 можно перевести в любую окрестность точки X , в частности в ω_1 . При этом величины $q_{\gamma_2}(X)$ и $q_{f(\gamma_2)}(f(X))$ будут сохранять свои первоначальные значения. После этого кривую γ_2 можно непрерывной деформацией перевести в кривую γ_1 , внутри $\omega_1 - X$, так как степени точки X относительно кривых γ_1 и γ_2 равны. Но при этом величина $q_{f(\gamma_2)}(f(X))$ также не изменяется. Следовательно, для исходных кривых γ_1 и γ_2

$$q_{f(\gamma_1)}(f(X)) = q_{f(\gamma_2)}(f(X)).$$

Утверждение доказано.

Лемма. Пусть G — гомеоморфная кругу область на поверхности Φ , ограниченная простой кривой γ , и X — точка области G . Пусть для любой точки Y области G или ее границы γ , отличной от X , $f(Y) \neq f(X)$. Тогда, если $|j(X)| > 1$, то каждая точка поверхности Φ , принадлежащая той компоненте разбиения ее кривой $f(\gamma)$, которой принадлежит $f(X)$, кроме самой $f(X)$, имеет в G по крайней мере два прообраза.

Доказательство. Пусть точка Y принадлежит указанной компоненте разбиения поверхности Φ кривой $f(\gamma)$.

Покажем сначала, что Y имеет по крайней мере один прообраз в G . Допустим противное. Будем непрерывно сжимать кривую γ к точке X внутри G — X . Так как по предположению Y не имеет прообразов в G , то ни в какой момент деформации кривой γ кривая $f(\gamma)$ не проходит через точку Y и стягивается к точке $f(X) \neq Y$. Отсюда следует, что степень точки Y относительно кривой $f(\gamma)$ равна нулю. Но, с другой стороны, она равна $j(X) \neq 0$, так как для исходного положения кривой γ точку $f(X)$ можно непрерывно перевести в Y , не пересекая кривую $f(\gamma)$. Мы пришли к противоречию. Итак, точка Y имеет по крайней мере один прообраз в G .

Допустим теперь, что точка Y имеет только один прообраз в G , обозначим его $\tilde{Y}$. Тогда, очевидно, точка $\tilde{Y}$ является регулярной точкой, G будет ее нормальной окрестностью и индекс точки Y равен индексу точки X , в частности $|j(\tilde{Y})| > 1$. Доказать существование других прообразов точки Y кроме $\tilde{Y}$ труднее. С этой целью мы рассмотрим некоторые вспомогательные построения.

Пусть из точки O на плоскости α выходит простая ломаная a с конечным числом звеньев, уходящая в бесконечность. Пусть γ замкнутая ломаная, не содержащая точку O и пересекающая ломаную a в конечном числе точек. Пусть ломанные a и γ как-то ориентированы. Схему пересечений ломаной γ с ломаной a мы представим строкой вида

$$a \, a \bar{a} \dots a \bar{a},$$

которая получается следующим образом. Двигаясь вдоль ломаной γ , мы каждый раз, когда пересекаем ломаную a , записываем в строку пересечений a или $\bar{a}$, смотря по тому, как пересекается ломаная a справа налево или слева направо.

Две строки пересечений мы будем называть эквивалентными, если они могут быть переведены друг в друга элементарными преобразованиями. К элементарным преобразованиям мы относим опускание в строке рядом расположенных элементов a и $\bar{a}$, пополнение строки такими парами (первый и последний элементы строки считаются рядом расположенными), перестановку первого элемента на последнее место и, наоборот, последнего элемента на первое место.

Очевидно, строка пересечений ломаной γ с ломаной a после опускания в ней всех пар $(a \bar{a})$ и $(\bar{a} a)$ имеет вид

$$a a \dots a \text{ или } \bar{a} \bar{a} \dots \bar{a},$$

где число элементов a (соответственно $\bar{a}$) равно $|q_{\gamma}(O)|$.

При непрерывной деформации ломаной γ в области $\alpha - O$ строка ее пересечений с a либо не изменяется, либо подвергается элементарным преобразованиям.

Разобьем теперь ломаную a произвольной точкой A на две ломаные: конечную b и бесконечную c . Каждой замкнутой ломаной γ , не проходящей через точки O и A , пересекающей a в конечном числе точек, мы сопоставим строку пересечений:

$$bc \bar{b} \dots \bar{c},$$

которая получается подобно тому как и в предыдущем случае. Аналогично предыдущему определяются элементарные преобразования строки, как опускание пар $(b \bar{b})$, $(c \bar{c})$, пополнение строки такими парами, перестановка первого элемента на последнее место и наоборот.

Очевидно, если ломаная γ непрерывной деформацией переводится в ломаную γ' в области $\alpha - O - A$ так, что в каждый момент деформаций число пересечений ее с a конечно, то строки пересечений ломаных γ и γ' эквивалентны, т. е. переводятся друг в друга элементарными преобразованиями.

Продолжим теперь доказательство леммы. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхность $\bar{\Phi}$ — плоскость. Проведем из точки $f(X)$ через точку Y простую ломаную a , уходящую в бесконечность. Пусть b — отрезок ломаной между точками $f(X)$ и Y , а c — оставшаяся (бесконечная) часть.

Возьмем в G малый простой ограничивающий гомеоморфную кругу область G' контур γ' так, чтобы точка $\bar{Y}$ была внутри G' , а X вне ее. Соединим произвольную точку P кривой γ с произвольной точкой Q кривой γ' простой кривой γ'' , не проходящей через точку X , внутри двухсвязной области, ограничиваемой кривыми γ и γ' . Обозначим $\bar{\gamma}$ замкнутую кривую, составленную из кривой γ , кривой γ' и дважды взятой кривой γ'' . Очевидно,

кривая $\bar{\gamma}$ может быть непрерывной деформацией в области $G - X - \bar{Y}$ переведена в любую сколь угодно малую окрестность точки X . Поэтому кривая $f(\bar{\gamma})$ может быть переведена непрерывной деформацией в любую малую окрестность точки $f(X)$, не проходя ни в какой момент деформации ни через точку $\bar{Y}$, ни через точку $f(X)$.

Если вписать в кривую $f(\bar{\gamma})$ ломаную с достаточно малыми звеньями, то ее также можно непрерывной деформацией в области $\bar{\Phi} - f(X) - \bar{Y}$ перевести в сколь угодно малую окрестность точки $f(X)$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что $f(\bar{\gamma})$ является ломаной.

Легко представить себе деформацию ломаной $f(\bar{\gamma})$, при которой ее части $f(\gamma)$ и $f(\gamma')$ не изменяются, а $f(\gamma'')$ переходит в ломаную, не пересекающую ломаной a . Будем считать, что ломаная $f(\bar{\gamma})$ в исходном положении обладает этим свойством. Тогда строка ее пересечений при соответствующей ориентации a элементарными преобразованиями приводится к виду

$$c c c \dots c b \bar{c} b \bar{c} \dots b \bar{c}.$$

Часть строки до первого элемента b представляет собой приведенную строку пересечений ломаной $f(\gamma)$, а оставшаяся часть — приведенную строку пересечений $f(\gamma')$. В первой части число элементов c , а во второй части число пар $b \bar{c}$ равно $|j(X)| = |j(\bar{Y})|$.

Ломаную $f(\bar{\gamma})$ можно непрерывной деформацией в области $\bar{\Phi} - f(X) - \bar{Y}$ перевести в сколь угодно малую окрестность точки $f(X)$. При этом строка пересечений $f(\bar{\gamma})$ после упрощения будет иметь вид

$$b b \dots b,$$

где число элементов (b) равно $|j(X)|$. Очевидно, строки

$$b b \dots b$$

и

$$c c \dots c b \bar{c} \dots b \bar{c}$$

не эквивалентны. С другой стороны, они должны быть элементарно преобразуемы друг в друга, так как соответствуют ломаным, которые непрерывной деформацией в области $\bar{\Phi} - f(X) - Y$ переводятся одна в другую. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

§ 4. Положительная, отрицательная и полная вариация непрерывного отображения

Пусть Φ и $\bar{\Phi}$ — ориентированные гладкие поверхности и f — непрерывное отображение ограниченной вариации поверхности Φ на поверхность $\bar{\Phi}$. *Положительной (отрицательной) вариацией* отображения f на множестве H поверхности Φ мы будем называть абсолютную вариацию f на подмножестве регулярных относительно отображения f точек H с положительным (соответственно отрицательным) индексом. *Полную вариацию* отображения f на множестве H определим как разность между положительной и отрицательной вариациями. Положительную, отрицательную и полную вариацию отображения f на множестве H будем обозначать $v^+(H)$, $v^-(H)$ и $v(H)$ соответственно.

Лемма 1. *Абсолютная вариация отображения f на множестве нерегулярных точек поверхности Φ относительно отображения f равна нулю.*

Доказательство. Пусть H — множество нерегулярных относительно отображения f точек поверхности Φ и $f(H)$ его образ на поверхности $\bar{\Phi}$. Так как каждая точка $f(H)$ имеет бесконечное число прообразов на Φ , то по следствию леммы 3 § 2 площадь $f(H)$ равна нулю. Но тогда по лемме 4 § 2 абсолютная вариация f на H равна нулю.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Множество E тех регулярных точек X поверхности Φ , у которых $|j(X)| > 1$, не более чем счетно.*

Доказательство. Допустим, лемма неверна. Так как точки множества E суть регулярные точки, то для каждой точки X из E можно указать такое δ , что в δ — окрестности точки X не будет точек, имеющих своим образом $f(X)$, кроме самой X . Отнесем каждой точке

$X \in E$ число $\delta(X)$, обладающее указанным свойством. Очевидно, для некоторого $\delta_0 > 0$ найдется несчетное множество E_{δ_0} точек $X \in E$, для которых $\delta(X) > \delta_0$.

Опишем около каждой точки $X \in E_{\delta_0}$ окружность γ_X радиуса $\delta_0/2$. Пусть $\lambda(X)$ — расстояние точки $f(X)$ от контура $f(\gamma_X)$. Из множества E_{δ_0} , очевидно, известным образом выделяется несчетное подмножество E_{δ_0, λ_0} таких точек X , для которых $\lambda(X) > \lambda_0 > 0$.

Так как множество E_{δ_0, λ_0} несчетно, то оно имеет точку сгущения A , принадлежащую поверхности. Возьмем две точки X' и X'' из E_{δ_0, λ_0} настолько близкие к A , чтобы расстояние между ними было меньше $\delta_0/2$, а расстояние между их образами на $\bar{\Phi}$ — меньше λ_0 . При этом точки $f(X')$ и $f(X'')$ принадлежат одной компоненте разбиения поверхности $\bar{\Phi}$ кривой $f(\gamma_{X'})$. А тогда по лемме § 3 внутри области ограниченной кривой $\gamma_{X'}$ можно указать по крайней мере две точки, имеющие своим образом $f(X'')$. Но это невозможно, так как в δ_0 -окрестности точки X'' нет точек, имеющих своим образом $f(X'')$, кроме самой X'' . Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 3. Множество H_j регулярных точек поверхности Φ относительно отображения f с заданным индексом j может быть представлено в виде

$$H_j = B - \omega,$$

где B — борелевское множество, а ω — множество нерегулярных точек.

Доказательство. Определим подмножество H_j^n множества H_j условием: точку $X \in H_j$ отнесем H_j^n , если в $1/n$ — окрестности точки X нет точек с образом $f(X)$, кроме самой точки X . Покажем, что если регулярная точка Y является предельной точкой множества H_j^n , то она принадлежит H_j .

Пусть G — нормальная окрестность точки Y диаметра меньше $1/n$ и γ — кривая в этой окрестности, относительно которой степень точки Y равна $\neq 1$. Если точка

$X \in H_j^n$ достаточно близка к Y , то G будет для нее нормальной окрестностью, степень ее относительно γ будет равна $+1$, а степень ее образа $f(X)$ относительно кривой $f(\gamma)$ будет равна степени точки $f(Y)$ относительно той же кривой. Но это значит, что индекс точки Y равен индексу точки X , т. е. j . Следовательно, точка Y принадлежит H_j^n .

Пополним множество H_j^n предельными точками, не принадлежащими H_j^n , и полученное множество обозначим $\bar{H}_j^n$. По доказанному множество $\bar{H}_j^n$ отличается от H_j^n только нерегулярными точками. Так как

$$H_j = \sum_n H_j^n,$$

а сумма $\bar{H}_j^n$ является борелевским множеством, то H_j допускает указанное в лемме представление.

Лемма доказана.

Теорема 1. Положительная, отрицательная и полная вариации непрерывного отображения f поверхностей Φ на поверхность $\bar{\Phi}$ являются вполне аддитивными функциями на кольце борелевских множеств поверхности Φ .

Доказательство. Пусть H — борелевское множество и M — любое множество, на котором абсолютная вариация f равна нулю. Тогда

$$v^0(H - M) = v^0(H).$$

Действительно,

$$v^0(H - M) \leq v^0(H),$$

так как $H - M \subset H$.

Покажем, что

$$v^0(H - M) \geq v^0(H).$$

Так как абсолютная вариация на M равна нулю, то существует для любого $\varepsilon > 0$ открытое множество G , содержащее M такое, что $v^0(G) < \varepsilon$.

Имеем:

$$v^0(H - G) + v^0(G) \geq v^0(H).$$

Отсюда следует, что

$$v^0(H - M) \geq v^0(H) - \varepsilon.$$

И так как ε произвольно, то

$$v^0(H - M) \geq v^0(H).$$

Принимая во внимание неравенство, указанное вначале, заключаем:

$$v^0(H - M) = v^0(H).$$

Утверждение доказано.

Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ — любые борелевские попарно не пересекающиеся множества и $H = H_1 + H_2 + \dots$. По определению

$$v^+(H) = v^0(H \cap \Omega^+),$$

где Ω^+ — множество регулярных точек поверхности Φ относительно отображения f с положительным индексом. По лемме 3

$$\Omega^+ = B - \omega,$$

где B — борелевское множество, а ω — множество, содержащее только нерегулярные точки.

По лемме 1 абсолютная вариация на множестве ω равна нулю. Поэтому

$$v^+(H) = v^0(H \cap B).$$

В силу полной аддитивности абсолютной вариации

$$v^0(H \cap B) = \sum_k v^0(H_k \cap B),$$

а по только что доказанному

$$v^0(H_k \cap B) = v^0(H_k \cap \Omega^+).$$

Следовательно,

$$v^+(H) = \sum_k v^+(H_k).$$

Аналогично устанавливается полная аддитивность отрицательной вариации v^- . Как следствие полной аддитивности v^+ и v^- получается полная аддитивность v .

Теорема доказана.

Теорема 2. Положительная, отрицательная и полная вариации непрерывного отображения f поверхности Φ на поверхность $\bar{\Phi}$ на любом борелевском множестве H допускают следующие интегральные представления:

$$v^+(H) = \int_{\bar{\Phi}} n_H^+(Y) dY,$$

$$v^-(H) = \int_{\bar{\Phi}} n_H^-(Y) dY,$$

$$v(H) = \int_{\bar{\Phi}} (n_H^+(Y) - n_H^-(Y)) dY,$$

где $n_H^+(Y)$ — число регулярных прообразов точки Y в H , с индексом $+1$, а $n_H^-(Y)$ — число регулярных прообразов с индексом -1 .

Эта теорема следует из леммы 2 и теоремы § 2.

Теорема 3. Пусть G — гомеоморфная кругу область на поверхности Φ , ограниченная кривой γ , на которой абсолютная вариация отображения f равна нулю. Пусть $\bar{\gamma}$ — образ кривой γ на поверхности $\bar{\Phi}$ и $q_{\bar{\gamma}}(Y)$ — степень произвольной точки Y поверхности $\bar{\Phi}$ относительно кривой $\bar{\gamma}$. Тогда полная вариация отображения f в области G

$$v(G) = \int_{\bar{\Phi} - \bar{\gamma}} q_{\bar{\gamma}}(Y) dY.$$

(Ориентация кривой $\bar{\gamma}$ предполагается соответствующей ориентации кривой γ , а последняя индуцируется ориентацией Φ).

Доказательство. Во-первых, заметим, что функция $q_{\bar{\gamma}}(Y)$ измерима, так как постоянна и целочисленна на каждой связной компоненте множества $\bar{\Phi} - \bar{\gamma}$. Далее, в области интегрирования $\bar{\Phi} - \bar{\gamma}$ могут быть опущены все точки Y , которые имеют среди прообразов на Φ нерегулярные или регулярные точки с индексом по

абсолютной величине большим единицы, а также те точки Y , у которых бесконечное число прообразов. Множество всех упомянутых точек Y имеет площадь, равную нулю.

Пусть точка Y имеет в G $n^+(Y)$ прообразов с индексом $+1$, $n^-(Y)$ прообразов с индексом -1 и $n^0(Y)$ прообразов с индексом, равным нулю. Разобьем область G на $n^+(Y) + n^-(Y) + n^0(Y)$ элементарных областей G_k так, чтобы в каждой области G_k был только один прообраз X_k точки Y . Пусть γ_k — контур, ограничивающий область G_k , и $\bar{\gamma}_k$ — его образ на $\bar{\Phi}$.

Имеем:

$$q_Y^-(Y) = \sum_k q_{\bar{\gamma}_k}^-(Y).$$

Так как область G_k не содержит других прообразов точки Y , кроме X_k , то

$$q_{\bar{\gamma}_k}^-(Y) = j(X_k).$$

Отсюда следует, что

$$q_Y^-(Y) = n^+(Y) - n^-(Y).$$

И для окончания доказательства достаточно воспользоваться интегральным представлением полной вариации, которое дается предыдущей теоремой.

Теорема доказана.

Замечание. Интегральное представление для полной вариации, даваемое теоремой 3, без труда распространяется на случай многосвязной области G . При этом, если γ_0 — внешний контур, ограничивающий область, а $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ — внутренние контуры, то подинтегральная функция

$$q_Y^-(Y) = q_{\gamma_0}^-(Y) - q_{\gamma_1}^-(Y) - \dots - q_{\gamma_r}^-(Y).$$

ГЛАДКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ

§ 1. Внешняя кривизна гладкой поверхности. Классификация точек поверхности

Пусть Φ — ориентированная гладкая поверхность и $n(X)$ — единичный вектор нормали поверхности, задающий ее ориентацию. *Сферическим отображением* поверхности Φ называется отображение ее на единичную сферу, при котором точке X поверхности сопоставляется точка сферы с вектором $n(X)$.

Гладкая поверхность Φ называется *поверхностью ограниченной внешней кривизны*, если ее сферическое изображение имеет конечную площадь с учетом перекрытия. Точный смысл этого наглядного требования заключается в том, что для любой конечной системы попарно не пересекающихся замкнутых множеств на поверхности сумма площадей их образов при сферическом отображении равномерно ограничена. Таким образом, требование ограниченности внешней кривизны поверхности есть не что иное, как условие ограниченности вариации ее сферического отображения.

Пусть G — любое открытое множество на поверхности Φ , $F_1, F_2, \dots, F_r$ — любые замкнутые попарно не пересекающиеся множества в G и $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_r$ — их образы при сферическом отображении поверхности. *Абсолютной кривизной* поверхности Φ на множестве G мы будем называть точную верхнюю грань сумм площа-

дей множеств $\bar{F}_k$ по всем конечным системам попарно не пересекающихся множеств F_k в G . Абсолютную кривизну поверхности на *любом* множестве H определим как точную нижнюю грань абсолютных кривизн на открытых множествах, содержащих H . Таким образом, абсолютная кривизна поверхности на данном множестве H есть не что иное как абсолютная вариация сферического отображения поверхности на этом множестве.

Отметим основные свойства абсолютной кривизны.

Теорема 1. *Абсолютная кривизна поверхности на произвольном множестве не меньше площади сферического изображения этого множества. Абсолютная кривизна равна нулю тогда и только тогда, когда площадь сферического изображения равна нулю.*

Теорема 2. *Абсолютная кривизна поверхности как функция множества является вполне аддитивной на кольце борелевских множеств.*

Теорема 3. *Абсолютная кривизна поверхности на любом борелевском множестве H*

$$\sigma^0(H) = \int_{\Omega} n(Y) dY,$$

где $n(Y)$ — число точек поверхности, имеющих своим образом точку Y единичной сферы Ω при сферическом отображении, dY — элемент площади единичной сферы, а интегрирование распространяется на всю сферу.

Все эти свойства получаются из соответствующих свойств абсолютной вариации непрерывного отображения, каким является сферическое отображение гладкой поверхности.

Для гладких поверхностей мы определяем следующую классификацию точек. Точку X гладкой поверхности будем называть *точкой одностороннего расположения*, если достаточно малая окрестность точки X поверхности располагается по одну сторону касательной плоскости в этой точке. Все остальные точки поверхности будем называть *точками двустороннего расположения*. Таким образом, в любой, сколь угодно малой окрестности точки X двустороннего расположения найдутся точки, расположенные по разные стороны касательной плоскости в X .

Точку X гладкой поверхности мы будем называть *регулярной* (относительно сферического отображения), если в достаточно малой окрестности ее нет точек с касательными плоскостями, параллельными касательной плоскости в X . Имеет место:

Теорема 4. *Абсолютная кривизна поверхности ограниченной внешней кривизны на множестве нерегулярных точек равна нулю.*

Эта теорема, так же как и предыдущие, следует из свойств абсолютной вариации сферического отображения.

Дальнейшая классификация точек гладкой поверхности оказывается возможной благодаря следующей теореме Н. В. Ефимова [1]:

Теорема 5. *Пересечение окрестности регулярной точки X гладкой поверхности с касательной плоскостью в этой точке представляет собой либо точку (точку X), либо четное число простых кривых, исходящих из точки X .*

Доказательство. Пусть X — регулярная точка поверхности. Как всякая точка поверхности, X является либо точкой одностороннего расположения, либо точкой двустороннего расположения. Пусть X — точка одностороннего расположения. Покажем, что касательная плоскость α в точке X с достаточно малой окрестностью этой точки на поверхности не имеет других общих точек, кроме X . Действительно, в противном случае существует последовательность точек X_k поверхности, сходящаяся к X , и такая, что каждая точка этой последовательности лежит в плоскости α . Так как точка X является точкой одностороннего расположения, то для точек X_k , достаточно близких к X , плоскость α является касательной плоскостью, а это противоречит предположению о регулярности точки X . Итак, если регулярная точка X является точкой одностороннего расположения, то касательная плоскость поверхности в этой точке имеет с достаточно малой окрестностью точки X только одну общую точку — точку X .

Пусть теперь регулярная точка X поверхности является точкой двустороннего расположения. Покажем, что пересечение окрестности точки X с касательной плоскостью в этой точке состоит из четного числа простых кривых, исходящих из точки X .

Пусть U — окрестность точки X , в которой нет точек с нормальными, параллельными нормалью в точке X . Обозначим H пересечение окрестности U с касательной плоскостью α в точке X и $\bar{H} = H - X$. Так как касательная плоскость поверхности в каждой точке множества $\bar{H}$ не совпадает с плоскостью α , то каждая связная компонента множества $\bar{H}$ представляет собой простую дугу.

Пусть γ — связная компонента $\bar{H}$. Фиксируем на ней произвольную точку A . Пусть $\lambda(Y)$ — расстояние точки Y кривой γ от точки X , а $\mu(Y)$ — расстояние ее от границы окрестности U . Тогда при движении точки Y вдоль кривой γ в любом из двух направлений от A либо $\lambda(Y) \rightarrow 0$, либо $\mu(Y) \rightarrow 0$. Покажем это.

Возьмем в качестве параметра на кривой γ дугу s , отсчитываемую от точки A (на любом отрезке AY кривая γ гладкая, а потому спрямляема). Функция $s(Y)$, рассматриваемая по одну сторону от A , может быть ограниченной или неограниченной. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Пусть $s(Y)$ ограничена и a — точная верхняя грань ее значений. При $s(Y) \rightarrow a$ Y стремится к определенному предельному положению Y_0 . Y_0 не может быть внутренней точкой области $U - X$, так как в окрестности этой точки $\bar{H}$ представляет собой простую кривую, для которой Y_0 была бы внутренней точкой. Таким образом, Y_0 либо совпадает с X , тогда $\lambda(Y) \rightarrow 0$, либо лежит на границе U и тогда $\mu(Y) \rightarrow 0$.

Рассмотрим теперь второй случай. В этот случай при движении Y от A в данном направлении $s(Y) \rightarrow \infty$. Если утверждение относительно функций λ и μ неверно, то существует последовательность точек Y_k , обладающая следующими свойствами:

- 1) $s(Y_k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$;
- 2) $\lambda(Y_k) > \varepsilon$, $\mu(Y_k) > \varepsilon$,

где ε — положительное число.

Не ограничивая общности, можно считать также, что $s(Y_k) - s(Y_{k-1}) > 1$.

Множество точек Y_k имеет точку сгущения Y_0 , являющуюся внутренней точкой области $U - X$. Эта

точка, очевидно, принадлежит $\bar{H}$, которое в малой окрестности точки Y_0 представляет собой простую дугу $\bar{\gamma}$ конечной длины. И так как Y_k тоже принадлежат $\bar{H}$, то они должны быть на этой дуге при достаточно большом k . Следовательно, дуга $\bar{\gamma}$ является частью γ . Ввиду конечности длины $\bar{\gamma}$ на ней не может быть бесконечного множества точек Y_k . Мы пришли к противоречию. Итак, при движении вдоль любой компоненты γ множества $\bar{H}$ в том или другом направлении мы неограниченно приближаемся либо к точке X , либо к границе окрестности U .

Очевидно, каждая компонента $\bar{H}$, при движении вдоль которой в любую сторону неограниченно убывает расстояние до границы U , находится на положительном расстоянии от точки X .

Множество всех компонент $\bar{H}$, которые пересекают ε — окрестность точки X , конечно, если достаточно мало ε . Для доказательства заметим прежде всего, что не существует компоненты γ множества $\bar{H}$, при движении вдоль которой в любом из двух направлений мы неограниченно приближались бы к точке X . Действительно, такая компонента, пополненная точкой X , ограничивала бы кусок поверхности, принадлежащей U . И так как край этого куска поверхности лежит в плоскости α , то, очевидно, найдется на нем точка, в которой касательная плоскость будет параллельна плоскости α — касательной плоскости в точке X . Но это невозможно по выбору окрестности U . Отсюда следует, что любая компонента γ множества $\bar{H}$, пересекающая ε — окрестность точки X , пересекает ее границу.

Допустим, число компонент, пересекающих ε — окрестность точки X , бесконечно. Возьмем на каждой такой компоненте γ точку Y , лежащую на границе ε — окрестности. Пусть Y_0 — точка сгущения точек Y . Так как множество $\bar{H}$ в малой окрестности точки Y_0 представляет собой простую дугу $\bar{\gamma}$, то при достаточной близости Y к Y_0 точка Y должна быть на $\bar{\gamma}$ и, следовательно, γ содержит Y_0 . Но это возможно только для одной компоненты. Мы пришли к противоречию. Таким образом, число компонент $\bar{H}$ конечно и, следовательно,

в непосредственной близости точки X будут только те компоненты, которые в одну сторону неограниченно приближаются к точке X , в другую — к границе окрестности U . Точка X является концевой точкой для таких компонент.

Итак, пересечение окрестности U точки X с касательной плоскостью в этой точке в непосредственной близости точки X состоит из конечного числа простых кривых, исходящих из X .

То, что число кривых четно, вытекает из того, что эти кривые разбивают окрестность точки X на „секторы“ так, что смежные секторы располагаются по разные стороны касательной плоскости в точке X .

Теорема доказана.

Регулярную точку X гладкой поверхности мы будем называть *эллиптической*, если достаточно малая окрестность точки X на поверхности имеет с касательной плоскостью в точке X только одну общую точку — точку X .

Точку X поверхности будем называть *параболической*, если пересечение касательной плоскости в точке X с поверхностью вблизи X состоит из двух простых дуг, исходящих из X .

Точку X назовем *гиперболической*, если пересечение касательной плоскости в X с поверхностью вблизи X состоит из четырех простых дуг, исходящих из X .

Остальные регулярные точки будем называть точками уплощения. Вблизи точки уплощения X пересечение поверхности с касательной плоскостью состоит из четного числа (большего четырех) простых дуг, исходящих из X .

Пусть H — любое множество точек на гладкой поверхности ограниченной внешней кривизны. *Положительной (отрицательной)* кривизной поверхности на множестве H мы будем называть абсолютную кривизну поверхности на подмножестве эллиптических (соответственно гиперболических) точек. *Полной кривизной* поверхности на множестве H будем называть разность между положительной и отрицательной кривизнами.

Теорема 6. *На гладкой поверхности ограниченной внешней кривизны положительная, отрицательная и полная кривизны суть ограниченные вполне адди-*

тивные функции на кольце борелевских множеств поверхности.

Теорема 7. Положительная, отрицательная и полная кривизны поверхности на любом борелевском множестве H допускают интегральное представление

$$\sigma^+(H) = \int_{\Omega} n_H^+(Y) dY,$$

$$\sigma^-(H) = \int_{\Omega} n_H^-(Y) dY,$$

$$\sigma(H) = \int_{\Omega} (n_H^+(Y) - n_H^-(Y)) dY,$$

где $n_H^+(Y)$ — число эллиптических, а $n_H^-(Y)$ — число гиперболических точек в H , имеющих своим образом точку Y при сферическом отображении поверхности, dY — элемент площади единичной сферы и интегрирование распространяется на всю сферу.

Теорема 8. Пусть сферическое изображение гомеоморфной кругу области G , ограниченной простой кривой γ с равной нулю площадью сферического изображения, не покрывает точку S единичной сферы. Тогда полная кривизна поверхности в области G

$$\sigma(G) = \int_{\Omega - \bar{\gamma} - S} q_{\bar{\gamma}}^-(Y) dY,$$

где $q_{\bar{\gamma}}^-(Y)$ — степень точки Y на сфере Ω с удаленной точкой S относительно кривой $\bar{\gamma}$ — сферического изображения γ , а интегрирование распространяется на множество $\Omega - \bar{\gamma} - S$ точек единичной сферы.

Теоремы 5, 6, 7 непосредственно следуют из соответствующих свойств положительной, отрицательной и полной вариации § 4 гл. I в применении к сферическому отображению и леммы [1]:

Лемма. Каждая регулярная точка гладкой поверхности имеет относительно сферического отображения определенный индекс. Если единичная сфера соответствующим образом ориентирована, то индекс эллиптической точки равен $+1$, параболической точки — 0 , гиперболической точки — 1 , индекс точки уплощения меньше -1 .

Доказательство. То, что каждая регулярная точка поверхности имеет определенный индекс относительно сферического отображения, следует из того, что каждая такая точка является регулярной относительно сферического отображения. Выясним, чему равен индекс в различных случаях.

Согласно определению, ориентация поверхности задается единичным вектором нормали. Мы будем предполагать, что единичная сфера ориентирована единичным вектором $n(X)$, задающим ориентацию поверхности.

Пусть X — эллиптическая точка поверхности и α — касательная плоскость в этой точке. Проведем параллельную α близкую к ней плоскость со стороны, где расположена поверхность. Она пересечет поверхность вблизи точки X по гладкой простой замкнутой кривой γ , охватывающей точку X .

Пусть $\bar{X}$ — точка, соответствующая при сферическом отображении точке X , и $\bar{\gamma}$ — контур, соответствующий контуру γ . Обозначим $t(Y)$ полукасательную кривой γ в точке Y , а $n(Y)$ — внешнюю нормаль в этой точке. Спроектируем контур $\bar{\gamma}$ на касательную плоскость сферы в точке $\bar{X}$. Полупрямая $g(Y)$, идущая из точки $\bar{X}$ в точку проекции кривой γ , соответствующую точке Y , параллельна $n(Y)$. Индекс точки X есть полное изменение угла, образуемого полупрямой $g(Y)$ с некоторым фиксированным направлением, при обходе кривой γ , деленное на 2π . А так как полупрямые $g(Y)$ и $t(Y)$ перпендикулярны, то оно равно полному изменению угла, образуемого полукасательной $t(Y)$ с фиксированным в плоскости направлением. Последнее же, очевидно, равно 2π . Следовательно, индекс эллиптической точки равен $+1$.

В случае регулярных точек двустороннего расположения поступаем следующим образом. Проведем две плоскости α_1 и α_2 , параллельные плоскости α , близкие к ней, расположенные по разные стороны от α . Плоскость α пересекает поверхность в окрестности точки X по $2m$ кривым, которые разбивают окрестность точки X на $2m$ секторов. Каждая из плоскостей α_1 и α_2 пересекает поверхность по m кривым. Для одной плоскости эти кривые располагаются в четных секторах, для другой —

в нечетных. При $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow \alpha$ эти кривые сходятся к сторонам секторов.

Возьмем на каждой кривой γ_k пересечения плоскости α с поверхностью точку X_k и соединим ее кривыми γ'_k и γ''_k вблизи X_k с кривыми пересечения плоскостей α_1 и α_2 с поверхностью, которые расположены в секторах, прилегающих к γ_k . Так, из кривых пересечения плоскостей α_1 и α_2 с поверхностью и кривых γ'_k, γ''_k образуется контур γ , охватывающий точку X . В дальнейшем он играет ту же роль, что и контур γ в рассмотренном случае эллиптической точки.

Пусть $\bar{\gamma}$ — сферическое изображение контура γ и $\tilde{\gamma}$ — его проекция на касательную плоскость сферы в точке $\bar{X}$. Обозначим $g(Y)$ полупрямую, идущую из точки $\bar{X}$ в точку кривой $\tilde{\gamma}$, соответствующую точке Y кривой γ . Тогда индекс точки X равен деленному на 2π полному изменению угла $\vartheta(Y)$, образуемого полупрямой $g(Y)$ с некоторым фиксированным направлением при обходе контура γ .

Это изменение можно представить как сумму изменений указанного угла на участках кривой, определяемых секторами. Изменение угла $\vartheta(Y)$ на участке кривой γ , расположенном внутри сектора, ограниченного кривыми γ_k и γ_{k+1} , мало отличается от $\varphi_k - \pi$, где φ_k — угол, образуемый касательными в точках X_k и X_{k+1} кривых γ_k и γ_{k+1} . Чтобы в этом убедиться, надо воспользоваться параллельностью полупрямой $g(Y)$ и нормали кривой пересечения плоскости α_1 (или α_2) с поверхностью в точке Y .

Разность между изменением угла $\vartheta(Y)$ на участке кривой γ в секторе (γ_k, γ_{k+1}) и величиной $\varphi_k - \pi$ сколь угодно мала, если плоскости α_1 и α_2 достаточно близки к α . Таким образом, индекс точки X сколь угодно мало отличается от величины

$$\frac{1}{2\pi} \sum_k (\varphi_k - \pi) = 1 - m.$$

И так как он должен быть целым, то он равен $(1 - m)$.

Отсюда следует, что индекс параболической точки

равен нулю, индекс гиперболической точки равен -1 , а индекс точки уплощения меньше -1 .

Лемма доказана.

§ 2. Некоторые вспомогательные предложения

В этом параграфе мы докажем ряд теорем, которые будут использованы в следующих двух параграфах настоящей главы. Некоторые из них представляют и самостоятельный интерес.

Мы будем говорить, что поверхность Φ не допускает отрезания „горбушек“, если среди областей, на которые ее разбивает произвольная плоскость α , не найдется такой, граница которой целиком принадлежала бы плоскости α . Очевидно, на поверхности, не допускающей отрезания горбушек, не может быть эллиптических точек, и положительная кривизна такой поверхности равна нулю.

Теорема 1. Пусть Φ — гладкая поверхность, не допускающая отрезания горбушек, X — точка поверхности Φ и α — касательная плоскость в этой точке.

Тогда либо среди областей, на которые разбивает плоскость α поверхность Φ , найдутся четыре, для которых точка X граничная, либо плоскость α касается поверхности вдоль континуума, содержащего точку X .

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхность Φ гомеоморфна кругу, однозначно проектируется на плоскость α и что плоскость α является плоскостью xy . Проведем через точку X плоскость β , перпендикулярную плоскости α . Она пересечет поверхность по некоторой кривой γ . Можно считать, что кривая γ в окрестности точки X не является прямолинейным отрезком. (Если бы для каждой плоскости β кривая γ в окрестности точки X была прямолинейным отрезком, то существование континуума, о котором идет речь в теореме, очевидно).

Проведем в плоскости β прямую g так, чтобы она пересекала кривую γ в двух близких к X точках A и B , нигде не касалась этой кривой и чтобы число точек пересечения было конечным. Не ограничивая общности, будем предполагать, что между точками A и B нет

других точек пересечения и что отрезок AB прямой g расположен над поверхностью.

Утверждается, что через прямую g можно провести плоскость δ так, что среди областей, на которые разбивает эта плоскость поверхность, найдутся три, каждая из которых содержит на границе по крайней мере одну из точек A или B и „прилегает“ к границе поверхности Φ .

Возьмем на прямой g три точки L , M и N вне поверхности: точку L , близкую к A , вне отрезка AB так, чтобы на отрезке LA не было точек поверхности, точку M на отрезке AB , точку N , близкую к B , вне отрезка AB так, чтобы отрезок BN не пересекал поверхность. Таким образом, в нашем предположении относительно расположения отрезка AB и поверхности точка M находится над поверхностью, а точки L и N под ней. Обозначим $\overline{L}$, $\overline{M}$ и $\overline{N}$ проекции точек L , M и N на поверхность прямыми, параллельными оси z .

Пусть G_L , G_M и G_N — области разбиения поверхности плоскостью δ , содержащие точки $\overline{L}$, $\overline{M}$ и $\overline{N}$ соответственно. Очевидно, если области G_L и G_N не совпадают, то три области G_L , G_M , G_N и есть те, существование которых утверждается.

Обозначим γ отрезок AB кривой γ . Так как поверхность Φ не допускает отрезания горбушек, то какова бы ни была плоскость δ , точку $\overline{M}$ можно соединить с границей поверхности кривой γ_δ , которая целиком лежит под плоскостью δ , причем точка $\overline{M}$ является единственной общей точкой кривых γ_δ и γ . Относительно кривой γ_δ мы будем говорить, что она проходит справа (слева) от γ , если она вблизи точки $\overline{M}$ расположена справа (соответственно слева) от γ .

Допустим, для некоторой плоскости δ можно указать две кривые — γ'_δ и γ''_δ , проходящие справа, соответственно слева от γ . Очевидно, каждую из кривых γ'_δ и γ''_δ можно считать простой. В противном случае можно построить, исходя из кривых γ'_δ и γ''_δ , простые кривые, обладающие теми же свойствами.

Кривые γ'_δ и γ''_δ не имеют других общих точек, кроме $\overline{M}$. Действительно, пусть P — первая их точка

пересечения, если следовать из $\bar{M}$ вдоль γ^{δ} . Отрезки $\overline{MP}$ кривых γ'_8 и γ''_8 образуют простую замкнутую кривую. Она ограничивает гомеоморфную кругу область Φ' на поверхности. Очевидно, одна из точек — A или B — принадлежит Φ' . И так как край поверхности Φ' и точки A, B располагаются по разные стороны плоскости δ , то эта плоскость отрезает горбушку. Но это невозможно по условию теоремы.

Итак, кривая $\gamma'_8 + \gamma''_8$ — простая. Она разбивает поверхность Φ на две части. В одной из них точка A , а с ней и $\bar{L}$, а в другой — точки B и $\bar{N}$. Вместе с точками $\bar{L}$ и $\bar{N}$ указанным областям принадлежат G_L и G_N , которые, таким образом, различны. Остается показать, что всегда найдется положение плоскости δ , для которого есть две кривые — γ'_8 и γ''_8 , обладающие указанным свойством.

Если плоскость δ из вертикального положения повернуть в ту или другую сторону на малый угол, то в одном случае существует только правая кривая γ_8 , а в другом — только левая. Отсюда следует, что существует такое положение δ_0 плоскости δ , для которого существуют плоскости сколь угодно близкие к δ_0 с правыми и левыми кривыми γ_8 .

Пусть для самой плоскости δ_0 кривая γ_{8_0} — правая. Возьмем близкое к δ_0 положение δ_1 плоскости δ , чтобы кривая γ_{8_1} была левой. Так как кривая γ_{8_0} лежит существенно под плоскостью δ_0 , то кривая γ_{8_0} будет также под плоскостью δ_1 из-за близости δ_1 к δ_0 . Таким образом, для плоскости δ_1 существует правая и левая кривая γ_8 . А в этом случае, как показано выше, G_L , G_M и G_N различны.

Возьмем теперь последовательность прямых g , сходящуюся к касательной γ в точке X . Для каждой прямой g получим три не пересекающиеся области — G_L , G_M и G_N . Когда g сходится к касательной в точке X , точки L, M, N сходятся к точке X , плоскость δ_g , определяющая указанные области, сходится к касательной плоскости поверхности в точке X .

Область G_M разбивается отрезком $\bar{\gamma}$ кривой γ на две области — G'_M и G''_M . Для каждой из четырех областей G —

$\dot{G}_L$, $\dot{G}_N$, $\dot{G}_M$ и $\dot{G}_M^*$ — можно сделать два предположения, которые мы будем обозначать Ω и $\bar{\Omega}$.

Условие Ω : для каждого $\varepsilon > 0$ в ε — окрестности точки X внутри G найдется точка Y , расстояние которой от касательной плоскости поверхности в точке X не меньше $h_\varepsilon > 0$, причем h_ε зависит только от ε и не зависит от плоскости δ , которой определяется G . Условие $\bar{\Omega}$ заключается в том, что условие Ω не выполняется для некоторого ε .

Покажем, что если выполняется условие $\bar{\Omega}$, то существует континуум на поверхности, содержащий точку X , вдоль которого касательная плоскость стационарна, т. е. совпадает с касательной плоскостью в точке X .

Опишем около точки X кружок радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ на поверхности и обозначим связную компоненту G внутри этого кружка, достаточно близкую к точке X , через G_ε . Угол, образуемый касательной плоскостью в произвольной точке G_ε с плоскостью α — касательной плоскостью в X , — равномерно стремится к нулю для некоторой последовательности плоскостей δ , сходящихся к α . Действительно, допустим, на G_ε есть точка Y , такая, что указанный угол больше $\vartheta_0 > 0$. Тогда в области G можно удалиться от плоскости α на расстояние порядка $\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_0$, а это противоречит условию $\bar{\Omega}$.

Пусть последовательность положительных чисел μ_k сходится к нулю. Определим последовательность множеств M_k на поверхности Φ . Точку X поверхности отнесем M_k , если ее расстояние от плоскости α не больше μ_k , и угол, образуемый касательной плоскостью в этой точке с плоскостью α , также не больше μ_k . Для любого M_k найдется G_ε в нем содержащаяся. Поэтому M_k содержит связную компоненту, которая пересекает границу $\frac{\varepsilon}{2}$ —

окрестность U_ε точки X и сколь угодно близкую к X . Отсюда следует, что пересечение всех M_k содержит континуум, исходящий из точки X , вдоль которого поверхность касается плоскости α .

Пусть теперь для каждой из четырех областей G выполняется условие Ω . Покажем, что тогда среди

областей, на которые плоскость α разбивает поверхность Φ , найдутся четыре, содержащие на границе точку X .

Сместим плоскость α вверх и вниз параллельно себе на малое расстояние h . Полученные при этом плоскости обозначим α^+ и α^- соответственно. При достаточно малом h области G_L и G_N будут иметь точки над плоскостью α^+ , сколь угодно близкие к точке X , а области G'_M и G''_M — точки, расположенные под плоскостью α^- , тоже сколь угодно близкие к X . Обозначим $\tilde{G}_L$, $\tilde{G}_N$, $\tilde{G}'_M$ и $\tilde{G}''_M$ области на поверхности Φ , содержащие указанные точки и расположенные над плоскостью α^+ и α^- соответственно. Если после того как точки выбраны взять плоскость δ , достаточно близкую к α , то области $\tilde{G}_L$, $\tilde{G}_N$, $\tilde{G}'_M$ и $\tilde{G}''_M$ будут частями областей G_L , G_N , G'_M и $\tilde{G}''_M$ и не пересекаются. Каждая из четырех областей $\tilde{G}_L$, $\dots$, $\tilde{G}''_M$ прилегает к границе поверхности Φ (иначе она представляла бы собой горбушку). При $h \rightarrow 0$ области $\tilde{G}_L, \dots, \tilde{G}''_M$ сходятся к четырем не пересекающимся областям, каждая из которых содержит на границе точку X .

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть Φ — гладкая поверхность, не допускающая отрезания горбушек, и K — континуум на ней, имеющий сферическим изображением точку. Тогда касательная плоскость поверхности вдоль континуума K стационарна, т. е. касательная плоскость поверхности во всех точках континуума одна и та же.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхность Φ задана уравнением:

$$z = z(x, y)$$

и в точках континуума

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Допустим, утверждение теоремы неверно и континуум K содержит две точки — A и B , координаты z у которых различны. Пусть для определенности $z_A < z_B$. Рассечем поверхность Φ плоскостью α_t :

$$z = t, \quad z_A < t < z_B.$$

Эта плоскость содержит по крайней мере одну точку C_t континуума K . Обозначим M_t ту компоненту пересечения плоскости α_t с поверхностью, которой принадлежит точка C_t . По теореме 1 M_t либо содержит континуум, вдоль которого $\partial z / \partial x = \partial z / \partial y = 0$, либо разбивает поверхность по крайней мере на четыре области. В работе А. С. Кронрода (2) показано, что множество значений t , для которых имеет место хотя бы одна из указанных возможностей имеет меру нуль. Отсюда следует, что весь континуум K лежит в плоскости $z = \text{const}$, которая касается поверхности во всех точках K .

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если поверхность ограниченной внешней кривизны допускает отрезание горбушек, то положительная кривизна поверхности отлична от нуля, в частности, на поверхности есть эллиптические точки.*

Доказательство. Пусть α — плоскость, отрезающая горбушку S от поверхности, т. е. кусок поверхности с краем, целиком лежащим в плоскости α . Поверхность S имеет опорные плоскости всех направлений, достаточно близких к α . Отсюда следует, что сферическое изображение множества точек одностороннего расположения имеет не равную нулю площадь. Так как сферическое изображение множества нерегулярных точек поверхности имеет площадь, равную нулю, а регулярная точка одностороннего расположения может быть только эллиптической, то сферическое изображение множества эллиптических точек поверхности имеет площадь, отличную от нуля. Следовательно, положительная кривизна поверхности отлична от нуля.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Если на поверхности ограниченной внешней кривизны есть эллиптическая (гиперболическая) точка, то положительная (соответственно*

отрицательная) кривизна поверхности отлична от нуля.

Если на поверхности есть параболическая точка, то положительная и отрицательная кривизна отличны от нуля.

Доказательство. То, что положительная кривизна поверхности отлична от нуля, если на ней есть эллиптическая точка, следует из теоремы 3, так как в этом случае поверхность, очевидно, допускает отрезание горбушек.

Пусть X — гиперболическая точка поверхности. Покажем, что отрицательная кривизна поверхности отлична от нуля. Пусть ω — малая гомеоморфная кругу окрестность точки X , ограниченная простой кривой γ и такая, что в ней и на ее границе γ нет точек с касательными плоскостями, параллельными касательной плоскости в X , кроме самой X . Обозначим $\bar{X}$ и γ сферическое изображение точки X и кривой γ соответственно, а U — компоненту разбиения сферы кривой γ , которой принадлежит точка $\bar{X}$. Почти все точки U имеют в ω в качестве прообразов только эллиптические, гиперболические и параболические точки и притом в конечном числе. А так как степень точки $Y \in U$ равна сумме индексов прообразов и в то же время равна —1 — степени точки $\bar{X}$, то среди прообразов должны быть гиперболические точки. Таким образом, площадь сферического изображения гиперболических точек поверхности не меньше площади U . Следовательно, отрицательная кривизна поверхности отлична от нуля.

Рассмотрим случай параболической точки X . Допустим, существуют сколь угодно близкие к X эллиптические точки. Тогда положительная кривизна поверхности в сколь угодно малой окрестности точки X отлична от нуля. Отсюда следует, что в любой сколь угодно малой окрестности U^* точки $\bar{X}$ есть множество M положительной площади, каждая точка которого имеет среди прообразов хотя бы одну эллиптическую точку, а остальные прообразы могут быть только гиперболическими и параболическими точками. Так как сумма индексов прообразов точки $Y \in M$ в ω должна быть равна нулю (степени $\bar{X}$ относительно γ), если окрестность U^* достаточно мала, а среди прообразов заведомо

есть эллиптическая точка, то среди них должна быть хотя бы одна гиперболическая точка. И, следовательно, по доказанному, отрицательная кривизна поверхности также не равна нулю.

Допустим теперь, что в достаточно малой окрестности точки X нет эллиптических точек поверхности. Не ограничивая общности, можно считать, что такой окрестностью является ω . Поверхность ω не допускает отрезания горбушек в силу теоремы 3. А тогда по теореме 1 точка X не может быть параболической, так как касательная плоскость поверхности в точке X разбивает окрестность на две области, а плоского континуума, о котором идет речь в теореме 1, не может быть из-за регулярности точки X .

Теорема доказана.

Теорема 5. *Замкнутая поверхность Φ ограниченной внешней кривизны имеет полную кривизну*

$$\sigma = \pi \chi(\Phi),$$

где $\chi(\Phi)$ — эйлерова характеристика поверхности.

Доказательство. Для гладкой кусочно-аналитической поверхности это утверждение следует, как известно, из теоремы Гаусса — Боннэ.

Разобьем поверхность Φ на малые элементарные области G_k , ограниченные кривыми γ_k . Возьмем в каждой области G_k точку X_k . Пусть $\bar{X}_k$ ее сферическое изображение, а $\bar{X}_k^*$ точка сферы ω , диаметрально противоположная $\bar{X}_k$. Обозначим $\bar{\gamma}_k$ сферическое изображение кривой γ_k и $q_{\bar{\gamma}_k, \bar{X}_k^*}(Y)$ степень точки $Y \in \omega$ на сфере ω с удаленной точкой $\bar{X}_k^*$. Тогда

$$\sigma(\Phi) = \sum_k \int_{\omega} q_{\bar{\gamma}_k, \bar{X}_k^*}(Y) dY.$$

Очевидно, в этой формуле можно взять вместо точек $\bar{X}_k^*$ близкие точки.

Пусть $\tilde{\Phi}$ — близкая к Φ гладкая кусочно-аналитическая поверхность, причем такая, что в близких точках касательные плоскости поверхностей Φ и $\tilde{\Phi}$ образуют

малые углы. Подвергнем поверхность $\tilde{\Phi}$ разбиению на элементарные области $\tilde{G}_k$ кусочно-регулярными кривыми $\tilde{\gamma}_k$, близкими к кривым γ_k , топологически эквивалентное разбиению поверхности Φ на области G_k . Пусть в соответствующих точках поверхностей Φ и $\tilde{\Phi}$, лежащих на границе по крайней мере трех областей G_k , нормали параллельны. Полная кривизна поверхности $\tilde{\Phi}$

$$\sigma(\tilde{\Phi}) = \sum_k \int_{\omega} q_{\tilde{\gamma}_k, \tilde{X}_k}^*(Y) dY.$$

Покажем, что

$$\sum_k \int_{\omega} q_{\tilde{\gamma}_k, \tilde{X}_k}^*(Y) dY = \sum_k \int_{\omega} q_{\tilde{\gamma}_k, \tilde{X}_k}^*(Y) dY.$$

Отрезки кривых $\tilde{\gamma}_k$ и $\tilde{\gamma}_l$ естественным образом поставлены в соответствие топологической эквивалентностью разбиения на элементарные области поверхностей Φ и $\tilde{\Phi}$. Пусть γ — отрезок, общий кривым $\tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\gamma}_j$, а $\tilde{\gamma}$ — соответствующий отрезок, общий кривым $\tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\gamma}_j$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} q_{\tilde{\gamma}_i}^*(Y) dY + \int_{\omega} q_{\tilde{\gamma}_j}^*(Y) dY &= \int_{\omega} (q_{\tilde{\gamma}_i}^*(Y) + q_{\tilde{\gamma}_j}^*(Y)) dY = \\ &= \int_{\omega} q_{\tilde{\gamma}_i + \tilde{\gamma}_j}^*(Y) dY = \int_{\omega} q_{\tilde{\gamma}_i}^*(Y) dY + \int_{\omega} q_{\tilde{\gamma}_j}^*(Y) dY, \end{aligned}$$

где $\tilde{\gamma}_i'$ и $\tilde{\gamma}_j'$ получаются заменой в кривых $\tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\gamma}_j$ отрезка γ на отрезок $\tilde{\gamma}$. Таким образом, можно последовательно заменить отрезки кривых $\tilde{\gamma}_k$ соответствующими отрезками кривых $\tilde{\gamma}_k$ и перейти от степени точки относительно кривых $\tilde{\gamma}_k$ к степени ее относительно кривых $\tilde{\gamma}_k$. Этим и устанавливается равенство сумм соответствующих интегралов, т. е. равенство полных кривизн поверхностей Φ и $\tilde{\Phi}$.

Итак для доказательства теоремы достаточно построить кусочно-аналитическую поверхность, обладающую указанными свойствами. Возьмем малое $\varepsilon > 0$, и достаточно густую сеть точек A_k на поверхности. Около каждой точки A_k опишем шар ω_k радиуса ε . Пусть T — тело, составленное из всех шаров ω_k . При достаточной густоте точек A_k связная компонента S границы T представляет собой кусочно-аналитическую поверхность, близкую к Φ , причем ее касательные плоскости образуют с касательными плоскостями Φ в близких точках малые углы. Остается, таким образом, только сгладить построенную поверхность.

Не ограничивая общности, можно считать, что никакие четыре сферы s_k , ограничивающие шары ω_k , не пересекаются в одной точке. Представим себе, что шар ω достаточно малого радиуса обкатывает поверхность S снаружи T . При этом он огибает некоторую поверхность $\tilde{S}$. Поверхность $\tilde{\Phi}$, которую мы хотим получить, является частью $\tilde{S}$. Она состоит из кусков сфер s_k , кусков торов, соответствующих пересечениям сфер s_k по две, и кусков сфер ω , соответствующих пересечениям s_k по три. Очевидно, указанным построением можно удовлетворить и последнему условию, которому должна удовлетворять поверхность $\tilde{\Phi}$. Именно, чтобы в соответствующих точках поверхностей Φ и $\tilde{\Phi}$, лежащих на границе по крайней мере трех элементарных областей G , нормали были параллельны.

Теорема доказана.

§ 3. Поверхности нулевой внешней кривизны

Гладкую поверхность Φ ограниченной внешней кривизны мы будем называть *поверхностью нулевой кривизны*, если ее положительная и отрицательная кривизны равны нулю. Очевидно, полная кривизна такой поверхности на любом множестве равна нулю. Обратное также верно. Именно, если полная кривизна поверхности на любом множестве равна нулю, то поверхность является поверхностью нулевой кривизны. Более того, если полная кривизна на любом открытом мно-

жестве равна нулю, то поверхность является поверхностью нулевой кривизны. Покажем это.

Если полная кривизна на любом открытом множестве равна нулю, то в силу полной аддитивности она равна нулю на всех борелевских множествах. Отсюда следует, что положительная и отрицательная кривизны на всех борелевских множествах равны нулю. В частности, положительная и отрицательная кривизны всей поверхности равны нулю.

В настоящем параграфе мы выяснили строение поверхностей нулевой кривизны.

Теорема 1. *Поверхность нулевой кривизны развертывающаяся (то есть локально изометрична плоскости) и имеет обычное для регулярных развертывающихся поверхностей строение с прямолинейными образующими и стационарной касательной плоскостью вдоль каждой образующей.*

Доказательство. Во-первых, покажем, что площадь сферического изображения поверхности нулевой кривизны равна нулю. Действительно, на поверхности не может быть ни эллиптических, ни гиперболических, ни параболических точек, так как при наличии на поверхности хотя бы одной из указанных точек, как показано в предыдущем параграфе, либо положительная, либо отрицательная кривизна отлична от нуля, что невозможно. Так как на поверхности нет ни эллиптических, ни гиперболических, ни параболических точек, то ее абсолютная кривизна равна нулю, а следовательно, равна нулю и площадь сферического изображения.

В ближайших рассмотрениях мы ограничимся достаточно малым куском поверхности и будем предполагать, что он задан уравнением

$$z = z(x, y)$$

над некоторым кругом K плоскости xy .

Обозначим E_p множество тех точек поверхности, в которых $dz/dx = p$. Тогда для почти всех p касательная плоскость вдоль каждой компоненты E_p стационарна. Действительно, сферическое изображение E_p расположено на дуге большого круга x_p . Так как площадь сферического изображения поверхности равна нулю, то для почти всех p линейная мера сферического изображения E_p на x_p равна нулю. Отсюда

следует, что для каждого такого p сферическое изображение любой компоненты E_p есть точка. По теореме предыдущего параграфа заключаем, что касательная плоскость вдоль каждой компоненты E_p стационарна. Утверждение доказано.

Пусть касательная плоскость поверхности вдоль каждой компоненты E_p стационарна. Тогда каждая такая компонента пересекается с границей поверхности. Допустим, утверждение неверно и x — компонента E_p , которая не пересекается с границей поверхности. Пусть ε настолько малое положительное число, что $\varepsilon \rightarrow$ окрестность x тоже не пересекается с границей поверхности. Существует разбиение множества E_p на два замкнутых подмножества — E'_p и E''_p , находящихся на положительном расстоянии, из коих первое содержит x и содержится в его ε -окрестности.

Так как множество E'_p находится на положительном расстоянии от границы поверхности и множества E''_p , то существует простая замкнутая кривая γ , отделяющая E_p от границы поверхности и не пересекающаяся с E''_p . Пусть G — гомеоморфная кругу область, ограниченная этой кривой.

Вдоль кривой $\gamma \frac{\partial z}{\partial x} - p$ сохраняет знак. Пусть для определенности $\frac{\partial z}{\partial x} > p + \delta$ ($\delta > 0$). Возьмем произвольное p' между p и $p + \delta$. Множество $E_{p'}$ отделяет x от γ . Следовательно, в $E_{p'}$ найдется компонента $x_{p'}$, отделяющая x от γ . Она содержится в области G .

Обозначим x ту компоненту разбиения области G множеством $x_{p'}$, которой принадлежит x . Очевидно, x — область, границей ее служит $x_{p'}$. Ввиду произвола p' , по доказанному можно считать, что касательная плоскость вдоль $x_{p'}$ стационарна; обозначим ее α . Компонента разбиения поверхности плоскостью α , содержащая какую-нибудь точку x , не лежащую в плоскости α , есть горбушка. Но поверхность не допускает отрезания горбушек, так как положительная кривизна равна нулю. Утверждение доказано.

Для удобства дальнейших рассуждений обозначим Ω

множество тех значений p , для которых выполняются следующие два условия:

- 1) касательная плоскость вдоль каждой компоненты E_p стационарна;
- 2) никакая компонента E_p не содержит точек ветвления, в частности, E_p не имеет внутренних точек.

Как показано выше, первое условие выполняется почти для всех p . Что касается второго условия, то и оно выполняется почти для всех p [2].

Пусть $p \in \Omega$. Множество E_p разбивает поверхность на области. Пусть G — одна из областей, в которой для определенности $\frac{\partial z}{\partial x} > p$. Пусть x — любая компонента

границы G . Очевидно, x принадлежит одной из компонент E_p или является целой компонентой. Покажем, что x *пересекается с границей поверхности*. При этом мы воспользуемся теми же соображениями, которые были применены при доказательстве того, что каждая компонента E_p пересекается с границей поверхности.

Пусть F — вся граница области G . Если утверждение неверно, то существует простая замкнутая кривая γ , отделяющая x от границы поверхности и не пересекающая F . Кривая γ проходит в G . Действительно, возьмем в G точку A , близкую к x и такую, чтобы соответствующее ей $p' = \partial z / \partial x \in \Omega$. Компонента x' точки A множества $E_{p'}$ проходит в G и пересекается с границей поверхности по доказанному. Так как точка A близка к x , а следовательно, лежит внутри области, ограниченной кривой γ , то компонента x' пересекает кривую γ . Итак, на кривой γ есть точка из G . Но тогда вся кривая проходит в G , так как не пересекает ее границу. После этого мы заключаем о возможности отрезания горбушки точно так же, как в указанном доказательстве. Но поверхность не допускает отрезания горбушек. Утверждение доказано.

Продолжим исследование компоненты x границы области G . Компонента x лежит в некоторой плоскости α , которая касается поверхности в каждой точке x . Подвергнем поверхность некоторому преобразованию, которое будем называть „уплощением“. Оно заключается в следующем.

Пусть A — точка поверхности, не принадлежащая ни G , ни E_p . Тогда она отделена некоторой компонентой $\tilde{x} \subset E_p$ от G . Пусть $\tilde{G}$ — компонента точки A , определяемая разбиением поверхности множеством $\tilde{x}$. Мы заменим область $\tilde{G}$ куском плоскости, касающейся поверхности вдоль $\tilde{x}$.

Полученная таким образом новая поверхность будет гладкой, а ее сферическое изображение будет содержаться в сферическом изображении исходной поверхности. Конечным или счетным числом таких уплощений мы получаем гладкую поверхность нулевой кривизны, у которой

$$\partial z / \partial x \geq p,$$

причем знак „больше“ имеет место только в области G , которая, как и ее граница, остались такими же, как и на исходной поверхности. Таким образом, строение компоненты x можно изучать на преобразованной поверхности.

В отличие от предыдущих рассмотрений мы будем предполагать, что x является компонентой границы G на открытой поверхности (без ограничивающей ее кривой). Обозначим $\tilde{\Phi}$ область на плоскости α (касательной плоскости вдоль компоненты x), в которую проектируется поверхность прямыми, параллельными оси z , и $\tilde{G}$ область, соответствующую области G . Очевидно, граница $\tilde{G}$ совпадает с границей G , поэтому x является компонентой границы $\tilde{G}$.

Обозначим x^* компоненту множества E_p на уплощенной поверхности, содержащую компоненту x границы G . *Компонента x^* лежит в плоскости α .* Действительно, так как сферическое изображение E_p имеет линейную меру нуль, то сферическое изображение x^* есть точка. Поэтому x^* лежит в плоскости, касающейся поверхности во всех точках множества x^* . Но x принадлежит x^* , следовательно, этой плоскостью является α .

Множество x лежит на границе x^ .* Действительно, пусть A точка из x . Тогда в любой ее окрестности есть точки из $\tilde{G}$. Но это значит, что A лежит на границе x^* .

Пусть g — произвольная прямая в плоскости α , параллельная плоскости xz , пересекающая x^* . Пересечение прямой g с x^* есть либо точка, либо отрезок. Это следует из того, что на уплощенной поверхности $dz/dx \geq p$, а угловой коэффициент плоскости α равен p . Таким образом, *множество x^* состоит из прямолинейных отрезков и точек, расположенных на непрерывном множестве прямых в плоскости α , параллельных плоскости xz .*

Пересечение замыкания множества x^ с границей поверхности связно.* Действительно, в противном случае x^* разбивает поверхность по крайней мере на две области, в каждой из которых есть точки G . Но это невозможно из-за связности G .

Так как пересечение замыкания x^* с границей поверхности связно, то граница x^* связна и, следовательно, *вся граница x^* состоит из x .*

Обозначим W_{xz} множество прямых в плоскости α , параллельных плоскости xz , и W_{xz}^* — подмножество множества W_{xz} , составленное из прямых, пересекающих x^* . Пусть g — произвольная прямая из W_{xz}^* , A_g^- — первая и A_g^+ — последняя точки пересечения ее с x^* , если следовать со стороны $x < 0$ в сторону $x > 0$ вдоль прямой g . Может случиться, что одной или даже обеих точек не существует. Это будет тогда, когда один из концов или оба конца отрезка, по которому пересекает прямая g множество x^* , принадлежат границе поверхности. Точки A_g^- и A_g^+ определяют полупрямые g^- и g^+ прямой g , направленные в сторону $x < 0$ и $x > 0$, соответственно. Множества, образованные этими полупрямыми, обозначим W_{xz}^- и W_{xz}^+ .

Каждая компонента w множества W_{xz}^- (или W_{xz}^+) является открытым множеством в W_{xz}^- (соответственно W_{xz}^+), а следовательно, гомеоморфна отрезку, если W_{xz}^* не сводится к единственной прямой. Пусть g_1 и

g_2 — прямые, ограничивающие w , и g — любая прямая из w , расположенная между g_1 и g_2 . Утверждается, что множество с точек A_g^- (соответственно A_g^+) есть выпуклая кривая и обращена выпуклостью в сторону $x > 0$ (соответственно $x < 0$). Докажем это утверждение, предполагая для определенности, что w является компонентой W_{xz}^- .

Допустим, утверждение неверно. Тогда найдутся три прямые g' , g'' , g''' , для которых выполняются следующие условия:

- 1) прямая g'' расположена между прямыми g' и g''' ;
- 2) существует прямая t , в плоскости α , отделяющая точку $A_{g''}^-$ от точек $A_{g'}^-$ и $A_{g'''}^-$, причем точка $A_{g''}^-$ расположена со стороны $x < 0$.

Прямые g_1 и g_2 ограничивают в плоскости α полосу S . Обозначим S^- множество точек полосы, принадлежащих полупрямым g^- . Пусть Φ_S — та часть поверхности, которая прямыми, параллельными оси z , проектируется на полосу S . Преобразуем поверхность Φ_S , оставив без изменения ту ее часть, которая соответствует в указанном проектировании S^- , и заменив оставшуюся часть множеством $S - S^-$. Полученную при этом поверхность будем обозначать $\overline{\Phi}_S$. Поверхность $\overline{\Phi}_S$ гладкая, с нулевой кривизной и, следовательно, не допускает отрезания горбушек.

Относительно поверхности $\overline{\Phi}_S$ существенно заметить следующее. Так как при достаточно больших x $dz/dx = p$ (поверхность $\overline{\Phi}_S$ на значительном удалении в сторону $x > 0$ лежит в плоскости α), а на всей поверхности $dz/dx \geq p$, то поверхность $\overline{\Phi}_S$ расположена ниже плоскости α . Далее, пусть D — область на поверхности $\overline{\Phi}_S$, которая проектируется в часть полосы S , ограниченную прямой t и полупрямыми g'^- и $g'''-$. Граница этой области, кроме некоторого участка, принадлежащего прямой t , лежит существенно ниже плоскости α .

Проведем через прямую t плоскость β , близкую плоскости α , так, чтобы точка $A_{g''}^-$ была над плоскостью β .

Пусть R_β — компонента разбиения поверхности ΦS плоскостью β , которой принадлежит точка $A_{\bar{g}}$. Точка $A_{\bar{g}}$ принадлежит области D . А так как поверхность не допускает отрезания горбушек, то R_β пересекает границу D . Но при достаточной близости β к α это невозможно. Действительно, часть границы D соответствующую прямой t R_β не пересекает, так как R_β расположена над одной полуплоскостью плоскости β , определяемой прямой t . Оставшуюся часть границы R_β не пересекает, потому что она находится существенно под плоскостью α , а следовательно, и под плоскостью β , если она достаточно близка к α . Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Покажем теперь, что число компонент множеств W_{xz}^- и W_{xz}^+ не может быть слишком большим. Именно, утверждается, что оно не больше трех. Действительно, если число компонент больше трех, то найдутся две компоненты w и w' , ограниченные прямыми, не являющиеся граничными в множестве W_{xz} . Каждая из компонент w и w' определяет на поверхности область T (соответственно T'), которая прямыми, параллельными оси z , проектируется в w (соответственно w'). Граница каждой из областей T и T' принадлежит κ . И так как в каждой из областей T и T' есть точки области G , то κ разбивает G , что невозможно.

Так как число компонент множеств W_{xz}^- и W_{xz}^+ не превосходит трех, то κ состоит из конечного числа выпуклых кривых (c), однозначно проектирующихся на ось y , и прямолинейных отрезков, параллельных плоскости xz . Принимая во внимание, что κ не содержит точек ветвления и разбивает поверхность, заключаем, что κ является простой кривой с концами на границе поверхности.

Покажем теперь, что выпуклая дуга c , определяемая описанным выше способом компонентой w множества W_{xz}^- (или W_{xz}^+), является прямолинейным отрезком. Допустим, утверждение неверно. Тогда на кривой c можно указать точку M и две близкие к ней точки K и L , расположенные по разные стороны от M так, что

полупрямая g_M , проведенная из точки M в плоскости α параллельно плоскости xz в направлении $x < 0$, разбивается отрезком KL . Пусть $\tilde{\gamma}$ — кривая, по которой плоскость, параллельная плоскости xz , проходящая через M , пересекает исходную поверхность.

Возьмем на кривой $\tilde{\gamma}$ со стороны $x < 0$ точку $\tilde{M}$, в которой $\partial z / \partial x \neq p$. Такая точка найдется в любой, сколь угодно малой окрестности точки M , так как в противном случае x содержала бы прямолинейный отрезок параллельной плоскости xz с концом в точке M , и эта точка была бы точкой ветвления для x , что исключено. Пусть для определенности в точке $\tilde{M}$

$$\partial z / \partial x = p_M > p.$$

Пусть p_1^* и p_2^* два числа из $\mathbb{Q}$, близкие к p и удовлетворяющие неравенствам

$$p_M > p_1^* > p > p_2^*.$$

Определим на поверхности открытые множества G_1 и G_2 , в которых $\partial z / \partial x < p_1^*$ и $\partial z / \partial x > p_2^*$ соответственно. Очевидно, x принадлежит каждому из этих множеств. Обозначим G_1^* и G_2^* компоненты множеств G_1 и G_2 , со-

держащие кривую x . Так как $G_1^* \cap G_2^*$ отделяет точку $\tilde{M}$ от x , то найдется компонента x^* границы $G_1^* \cap G_2^*$, отделяющая $\tilde{M}$ от x . Очевидно, x^* является компонентой границы одной из областей G_1^* или G_2^* .

При достаточной близости p_1^* и p_2^* к p x^* содержится в сколь угодно малой окрестности x . По доказанному x^* — простая кривая, расположенная в некоторой плоскости α^* , касающейся поверхности во всех точках x^* .

Пусть G^* — та из областей G_1^* или G_2^* , на границе которой лежит x^* . Подвергнем поверхность уплощению относительно области G^* подобно тому, как это было сделано вначале относительно области G . Пусть $\bar{c}$ — проекция в направлении оси z отрезка KL кривой c на плоскость α^* . Проведем из произвольной точки кривой $\bar{c}$ полупрямую g в плоскости α^* параллельно плоскости xz в направлении $x < 0$. Эта полупрямая при достаточной близости x^* к x обязательно пересечет x^*

В некоторой точке A_g . В противном случае можно было бы соединить очевидным образом точку кривой c с точкой M , не пересекая x^* .

По доказанному множество точек A_g представляет собой выпуклую кривую c^* , обращенную выпуклостью в сторону $x < 0$. При p_1^* и $p_2^* \rightarrow p$ эта кривая сходится к s . Но кривая c существенно выпукла в направлении $x > 0$ и, следовательно, не может быть пределом c^* . Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано. Итак, каждая из дуг c кривой x представляет собой прямолинейный отрезок, и сама кривая является простой ломаной с концами на границе поверхности.

Покажем, наконец, что x *представляет собой просто прямолинейный отрезок*. Допустим, x ломаная и Q ее вершина. Проведем через точку Q вертикальную плоскость δ так, чтобы она разделяла сходящиеся в Q звенья ломаной и чтобы кривая γ пересечения этой плоскости с поверхностью не содержала прямолинейного отрезка с концом в точке Q . Такая плоскость, очевидно, существует. В противном случае легко указать отрезок на поверхности, содержащий точку Q со стационарной касательной плоскостью, отличный от звеньев ломаной x , сходящихся в Q . Этот отрезок должен принадлежать x . Но x не содержит точек ветвления.

Сохраняя плоскость xu , возьмем в качестве плоскости xz плоскость δ . Теперь, чтобы доказать, что x не имеет излома в точке Q , достаточно повторить дословно предыдущее рассуждение, в котором было показано, что выпуклые отрезки c кривой x прямолинейные. Таким образом, мы приходим к выводу, что x представляет собой прямолинейный отрезок с концами на границе поверхности.

Пусть Q — произвольная точка поверхности. Тогда *либо через Q проходит прямолинейный отрезок со стационарной касательной плоскостью, с концами на границе поверхности, либо точка Q имеет окрестность, являющуюся куском плоскости*.

Допустим, точка Q не имеет плоской окрестности. Тогда каково бы ни было $\varepsilon > 0$, всегда существует вертикальная плоскость δ , проходящая через точку Q , такая, что на кривой ее пересечения с поверхностью ε — окрестность точки Q не будет прямолинейным отрезком.

В противном случае ε — окрестность точки Q на поверхности была бы плоской. Примем плоскость δ за плоскость xz . Пусть $\partial z/\partial x$ в Q равно p_Q . Тогда на расстоянии не большем ε от Q найдется точка A , в которой $\partial z/\partial x = p_A \neq p_Q$.

Возьмем любое p в Ω из интервала (p_A, p_Q) . Множество E_p отделяет A от Q . Пусть G_A та из областей на поверхности, определяемая множеством E_p , которой принадлежит A . Точка Q отделена от A некоторой компонентой κ границы G_A . По доказанному κ — прямолинейный отрезок с концами на границе поверхности и стационарной касательной плоскостью. Отделяя A от Q , отрезок κ проходит от Q на расстоянии не большем ε . Так как ε произвольно мало, то отсюда следует, что через Q проходит прямолинейный отрезок со стационарной касательной плоскостью и с концами на границе поверхности.

Покажем, что *прямолинейный отрезок, проходящий через точку Q , в случае, когда она не имеет плоской окрестности, единственный.*

То, что найденный прямолинейный отрезок является единственным, следует из более общего предложения, которое нам также понадобится. Именно, пусть P и Q — две точки поверхности, из коих хотя бы одна, например Q , не имеет плоской окрестности, пусть g_P и g_Q — прямолинейные отрезки со стационарной касательной плоскостью, проходящие через точки P и Q соответственно. Тогда, если отрезки g_P и g_Q имеют хотя бы одну общую точку, они совпадают.

Допустим, отрезки g_P и g_Q различны. Так как точка Q не имеет плоской окрестности, то существует сколь угодно близкая к ней точка A , которая тоже не имеет плоской окрестности и не лежит в касательной плоскости точки Q . По доказанному через точку A проходит прямолинейный отрезок g_A . При достаточной близости A к Q отрезок g_A пересекает либо g_P , либо g_Q , а следовательно, лежит в касательной плоскости прямых g_P и g_Q , что невозможно по выбору точки A .

Докажем теперь, что *поверхность нулевой кривизны локально изометрична плоскости*, т. е. каждая точка

поверхности имеет окрестность изометричную куску плоскости.

Пусть O — произвольная точка поверхности. Если точка O имеет плоскую окрестность, утверждение очевидно. Допустим, O не имеет плоской окрестности. Тогда по доказанному через O проходит и притом единственная прямолинейная, образующая g_O . Не ограничивая общности, будем считать, что точка O является началом координат, касательная плоскость поверхности в этой точке совпадает с плоскостью xu и прямолинейная образующая направлена по оси x .

Пусть γ — кривая, по которой плоскость $x=0$ пересекает поверхность. Обозначим F множество точек кривой γ , близких к O ($|y| \leq \epsilon$), каждая из которых не имеет плоской окрестности. Через каждую точку Q множества F проходит и притом единственная прямолинейная образующая g_Q .

Из единственности образующей g_Q следует, что она непрерывно зависит от Q на F . Так как различные прямые g_Q не пересекаются, то направление g_Q для Q , близких к O , мало отличаются от g_O .

Множество G на кривой γ , дополнительное к F , является открытым. Оно состоит из *прямолинейных* отрезков. Пусть δ один из таких отрезков. Его концы Q_1 и Q_2 принадлежат F . Утверждается, что *поверхность между прямыми g_{Q_1} и g_{Q_2} представляет собой кусок плоскости*, если все рассуждения относятся к достаточно малой окрестности кривой γ .

Действительно, вдоль отрезка δ и образующих g_{Q_1} и g_{Q_2} касательная плоскость стационарна. Следовательно, отрезок δ и образующие g_{Q_1} и g_{Q_2} лежат в одной плоскости. Обозначим ее α . Если утверждение неверно, то между прямыми g_{Q_1} и g_{Q_2} найдется точка A , не имеющая плоской окрестности, не принадлежащая плоскости α . Через точку A проходит прямолинейная образующая g_A . Она пересекает либо δ , либо g_{Q_1} , либо g_{Q_2} , а следовательно, лежит в плоскости α , что невозможно по выбору точки A . Итак, поверхность между образующими g_{Q_1} и g_{Q_2} представляет собой кусок плоскости.

До сих пор прямолинейные образующие g_Q определены только для точек Q множества F . Теперь мы можем определить прямолинейные образующие g_Q для точек Q из G соблюдая два условия, именно: 1) чтобы g_Q непрерывно зависела от Q , и 2) чтобы прямолинейные образующие, соответствующие различным точкам Q , не пересекались.

Пусть γ_1 и γ_2 — кривые, по которым плоскости $x = \varepsilon_1$ и $x = -\varepsilon_1$ пересекают поверхность (ε_1 мало). Прямолинейные образующие, проходящие через концы кривой γ и кривые γ_1 и γ_2 , выделяют окрестность D точки O на поверхности. Утверждается, что *эта окрестность изометрична куску плоскости*.

Возьмем на кривой γ достаточно густо точки $A_1, A_2, \dots, A_n$. Пусть B_i и C_i — точки пересечения образующей g_{A_i} с кривыми γ_1 и γ_2 . Рассмотрим многогранник P , составленный из треугольников $B_1 C_1 C_2, B_1 B_2 C_2, B_2 C_2 C_3, \dots$. Когда густота точек A_i на кривой γ увеличивается, многогранник P сходится к области D поверхности, причем грани многогранника сходятся к касательным плоскостям поверхности. Отсюда следует, что внутренняя метрика многогранника сходится к метрике поверхности. Но многогранник P очевидным образом разворачивается на плоскость. Поэтому окрестность D изометрична области на плоскости. Утверждение доказано. Вместе с ним полностью доказана теорема 1.

Теорема 2. *Полная поверхность с нулевой кривизной цилиндрическая.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что любые две прямолинейные образующие поверхности, проходящие через точки, не имеющие плоских окрестностей, параллельны.

Пусть g_1 и g_2 — две такие прямолинейные образующие. Так как поверхность полная, то g_1 и g_2 неограниченно продолжаемы, т. е. полные прямые. Они не могут пересекаться, так как проходят через точки, не имеющие плоских окрестностей. Таким образом, чтобы доказать параллельность прямых g_1 и g_2 , достаточно показать, что они не могут быть расходящимися.

Соединим какие-нибудь две точки прямых g_1 и g_2 простой кривой γ на поверхности. Будем теперь постепенно разворачивать поверхность. В процессе раз-

ворачивания поверхности плоскость окажется покрытой один раз. Прямые g_1 и g_2 , как геодезические на поверхности, перейдут в некоторые прямые $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ на плоскости. Так как прямые g_1 и g_2 на поверхности не пересекаются, то прямые $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ также не пересекаются, а следовательно, параллельны.

Пусть две точки $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ на прямых $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ неограниченно удаляются от некоторого начального положения, но так, что расстояние между ними остается ограниченным. Это возможно, так как прямые $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ параллельны. Точки P_1 и P_2 на прямых g_1 и g_2 , соответствующие $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$, также неограниченно удаляются. Расстояние между точками P_1 и P_2 в пространстве, а тем более на поверхности неограниченно растет, так как по предположению прямые g_1 и g_2 расходящиеся. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

§ 4. Поверхности с неотрицательной внешней кривизной

Поверхность Φ ограниченной внешней кривизны мы будем называть поверхностью с *неотрицательной* кривизной, если отрицательная кривизна ее равна нулю.

На поверхности с неотрицательной кривизной каждая регулярная точка является эллиптической, ибо, как установлено в § 2, наличие на поверхности хотя бы одной регулярной точки с индексом меньше единицы влечет за собой неравенство нулю отрицательной кривизны поверхности.

Для того чтобы поверхность была *поверхностью с неотрицательной кривизной*, необходимо чтобы полная кривизна на любом множестве точек поверхности была неотрицательна и достаточно чтобы она была неотрицательна на всех открытых множествах.

В настоящем параграфе мы имеем в виду выяснить внешнее строение поверхностей неотрицательной кривизны. При этом мы будем предполагать, что положительная кривизна отлична от нуля. Случай, когда она равна нулю, уже рассмотрен в предыдущем параграфе.

Лемма 1. Пусть X — эллиптическая точка поверхности с неотрицательной кривизной и $\bar{X}$ — ее сфе-

рическое изображение. Тогда точки X и $\bar{X}$ имеют такие окрестности G и $\bar{G}$ соответственно, что почти все точки $\bar{G}$ имеют в G по одному прообразу.

Доказательство. Пусть G — гомеоморфная кругу окрестность точки X , ограниченная простой кривой γ , не содержащая точек с нормальными, параллельными нормалью в точке X , кроме самой X . Пусть $\bar{G}$ — та из компонент разбиения единичной сферы образом $\bar{\gamma}$ кривой γ , которой принадлежит $\bar{X}$. Утверждается, что окрестности G и $\bar{G}$ точек X и $\bar{X}$ соответственно обладают свойствами, указанными в лемме.

Действительно, почти все точки $\bar{G}$ имеют регулярные прообразы в G , т. е. эллиптические точки и притом в конечном числе. Пусть $\bar{Y}$ — одна из таких точек. Степень точки $\bar{Y}$ относительно $\bar{\gamma}$ равна степени точки $\bar{X}$, т. е. $+1$. А так как степень точки $\bar{Y}$ равна сумме индексов ее прообразов, каждый из которых равен $+1$, то число прообразов равно одному.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Поверхность с неотрицательной кривизной выпукла в окрестности каждой эллиптической точки, т. е. каждая такая точка имеет окрестность, являющуюся выпуклой поверхностью.*

Доказательство. Пусть X — эллиптическая точка поверхности и α — касательная плоскость в X . Некоторая окрестность G точки X на поверхности расположена по одну сторону от плоскости α , причем X является единственной точкой из этой окрестности, которая лежит в плоскости α .

Проведем плоскость β , близкую к α , пересекающую G . Так как вблизи точки X нет точек с нормальными, параллельными нормалью в точке X , то β пересекает G по простой замкнутой кривой γ^* , ограничивающей гомеоморфную кругу область G^* , содержащую X и расположенную между плоскостями α и β . Построим выпуклую оболочку области G^* и обозначим $\bar{G}^*$ ту ее часть, которая расположена вне плоскости β . Утверждается, что все достаточно близкие к X эллиптические точки G принадлежат $\bar{G}^*$.

Действительно, пусть Y — близкая к X эллиптическая

точка, не принадлежащая $\bar{G}^*$. Ее малая окрестность U также не принадлежит $\bar{G}^*$. Сферическое изображение U имеет положительную площадь. Оно покрывается сферическим изображением той части G^* , которая принадлежит $\bar{G}^*$, если Y достаточно близка к X . Таким образом, вблизи точки $\bar{X}$ — сферического изображения точки X — существует множество положительной площади, каждая точка которого имеет по крайней мере два прообраза. А это противоречит лемме 1.

Итак, все близкие к X эллиптические точки лежат на $\bar{G}^*$. Отсюда следует, что плоскость β можно взять так близко к плоскости α , что все эллиптические точки G^* будут на $\bar{G}^*$. Пусть плоскость β проходит именно таким образом. Тогда утверждается, что $G^* = \bar{G}^*$.

Часть поверхности G^* , не принадлежащая $\bar{G}^*$, состоит из разветвляющихся поверхностей (она ведь не содержит регулярных точек). Пусть g — какая-нибудь ее прямолинейная образующая. Один из концов g принадлежит $\bar{G}^*$. В этой точке g касается $\bar{G}^*$, а следовательно, g принадлежит $\bar{G}^*$ в силу выпуклости $\bar{G}^*$. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть Φ — поверхность с неотрицательной кривизной и α — плоскость, пересекающая поверхность. Тогда каждая из частей, на которые разбивает плоскость α поверхность Φ , с краем, лежащим в этой плоскости, есть выпуклая поверхность, т. е. является областью на границе выпуклого тела.

Доказательство. Пусть Φ' — один из таких кусков, определяемых плоскостью α . Требуется доказать, что Φ' — выпуклая поверхность. Не ограничивая общности, можно считать, что число точек поверхности Φ , имеющих касательные плоскости, параллельные α , конечно, причем все эти точки эллиптические. Действительно, существует сколь угодно близкая к α плоскость α' , обладающая этим свойством. А если теорема будет доказана для случая плоскости α' , то предельным переходом она устанавливается и для α .

Покажем, что пересечение поверхности Φ' с любой плоскостью β , параллельной α , представляет собой

простую замкнутую кривую. Пусть β_0 — плоскость, параллельная α , касающаяся поверхности Φ' и такая, что вся поверхность Φ' расположена между α и β_0 . Эта плоскость, вообще говоря, может касаться поверхности Φ' в нескольких точках (эллиптических, так как нерегулярные точки исключены по предположению). Обозначим эти точки $A_1, A_2, \dots, A_r$.

Будем параллельно смещать плоскость β из положения β_0 в α . Так как поверхность Φ' выпуклая в окрестности каждой точки A_i , то для плоскостей β , близких к β_0 , пересечение β с Φ' (обозначим его χ_β) состоит из r простых кривых: $x_1, x_2, \dots, x_r$. Такое строение пересечения β с Φ' сохранится до тех пор, пока плоскость β не станет снова касательной к Φ' в новой точке (или точках).

Какие изменения в этот момент могут происходить с χ_β ? Выродиться в точку одна из его компонент не может, так как она к этому моменту описала бы замкнутую поверхность, которая, таким образом, не была бы связана с оставшейся частью поверхности Φ' . Не может произойти и соприкосновения двух компонент x_i, x_j без вырождения каждой из них в точку, ибо тогда точка соприкосновения x_i и x_j была бы точкой касания поверхности Φ' с плоскостью β , а такая точка, как эллиптическая, является изолированной в χ_β . Остается предположить, что в рассматриваемый момент χ_β пополняется конечным числом новых точек. Таким образом, при прохождении плоскости β через положение касания с поверхностью Φ' число компонент χ_β увеличивается.

К моменту, когда плоскость β совпадает с α , каждая из компонент x_s опишет поверхность Φ_s . Никакие две из этих поверхностей не имеют общих точек поверхности Φ' . Но поверхность Φ' связна, поэтому Φ_s может быть только одна. А следовательно, χ_β для каждого β между β_0 и α состоит только из одной компоненты, которая представляет собой простую замкнутую кривую.

Покажем теперь, что кривая χ_β , по которой пересекается поверхность Φ' с плоскостью β , является выпуклой кривой. Допустим, χ_β не выпуклая кривая. Тогда в плоскости β можно провести прямую g , которая разобьет χ_β не менее чем на три части. Пусть χ'_β и χ''_β — две части кривой, расположенные по одну сторону от g .

Обозначим Φ_β ту часть поверхности Φ' , которая отрезается от нее плоскостью β и расположена со стороны плоскости β_0 . Проведем через прямую g полуплоскость δ в то из полупространств, определяемых плоскостью β , где расположена поверхность Φ_β . Если полуплоскость δ сильно наклонена в сторону кривых χ'_β и χ''_β , то она заведомо разбивает поверхность Φ_β так, что кривые χ'_β и χ''_β принадлежат различным компонентам Φ'_δ и Φ''_δ этого разбиения.

Будем непрерывно поворачивать около оси g полуплоскость δ , увеличивая Φ'_δ и Φ''_δ . Очевидно, наступит момент, когда Φ'_δ и Φ''_δ сольются, образуя одну компоненту. Пусть это происходит в положении δ^* полуплоскости δ . Построим полуплоскость $\bar{\delta}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) полуплоскость $\bar{\delta}$ близка к δ^* , причем ее граничная прямая лежит в плоскости β ;

2) компоненты разбиения поверхности Φ_β , содержащие кривые χ'_β и χ''_β , различны;

3) существует только конечное число точек на поверхности Φ_β , в которых касательные плоскости параллельны $\bar{\delta}$, причем все эти точки эллиптические.

Если плоскость $\bar{\delta}$ сдвигать параллельно, увеличивая компоненты Φ'_δ и Φ''_δ , то они, ввиду близости $\bar{\delta}$ к δ^* , скоро сольются. Это слияние не может начаться у плоскости β по выбору прямой g . Вместе с тем оно не может начаться и во внутренней точке поверхности по причине, которая изложена в предыдущем рассмотрении. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано. Итак, кривая χ_β выпуклая. Следовательно, граница Φ' , лежащая в плоскости α , является выпуклой кривой.

Дополним поверхность Φ' выпуклым куском плоскости α , который ограничен краем поверхности Φ' . Утверждается, что *полученная таким образом замкнутая поверхность $\bar{\Phi}'$ является выпуклой поверхностью*. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что почти все плоскости, пересекающие $\bar{\Phi}'$, пересекают ее по замкнутым выпуклым кривым.

Пусть π — плоскость, обладающая следующим свойством: среди касательных плоскостей Φ' есть только конечное число параллельных π , причем все точки касания — эллиптические точки. Очевидно, почти все плоскости обладают указанным свойством. Утверждается, что плоскость π пересекает поверхность $\bar{\Phi}'$ по замкнутой выпуклой кривой.

Доказательство этого утверждения состоит из двух частей. В первой части устанавливается, что пересечение плоскости π с поверхностью $\bar{\Phi}'$ состоит из одной замкнутой кривой c_π . Это делается дословно так же, как доказательство того, что множество χ_β пересечения поверхности Φ' с плоскостью β , параллельной α , состоит из простой замкнутой кривой. Во второй части доказывается, что кривая c_π выпуклая. Эта часть дословно повторяет доказательство выпуклости кривой χ_β . Мы не будем делать этих повторений.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Полная поверхность Φ с неотрицательной и не равной нулю кривизной есть либо замкнутая выпуклая поверхность, либо бесконечная выпуклая поверхность.*

Доказательство. Так как положительная кривизна поверхности Φ отлична от нуля, то в сферическом изображении поверхности есть точка, все прообразы которой — эллиптические точки, и число прообразов конечно. Пусть A — один из прообразов. Будем касательную плоскость α в точке A непрерывно сдвигать и следить за той компонентой Φ_α разбиения поверхности плоскостью α , которой принадлежит A . По теореме 1 Φ_α все время является выпуклой поверхностью. На ее границе γ_α не могут появляться точки с касательной плоскостью, параллельной α , кроме как в случае вырождения границы γ_α в точку.

Если в некоторый момент γ_α вырождается в точку, то замкнутая выпуклая поверхность, описанная кривой γ_α к этому моменту, и есть вся поверхность Φ . В противном случае это противоречило бы связности Φ .

Если же кривая γ_α не вырождается, то она описывает бесконечную выпуклую поверхность, которая, как и в предыдущем случае, должна совпадать со всей поверхностью Φ .

Теорема доказана.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ РЕГУЛЯРНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

§ 1. О кратчайших в замкнутой области на плоскости. Нитяная поверхность

В настоящей главе будет доказана теорема о приближении произвольной поверхности ограниченной внешней кривизны регулярными поверхностями, внешние кривизны которых сходятся к внешним кривизнам данной. Эта теорема открывает возможности исследования поверхностей ограниченной внешней кривизны путем предельного перехода от регулярных. Именно таким способом в следующей главе будет установлена связь между внутренней и внешней кривизной поверхности.

Доказательство теоремы о приближении по идее довольно просто. Однако его безупречное проведение оказывается далеко не простым. Настоящий параграф, так же как и два последующих, посвящен рассмотрению некоторых элементов геометрических построений, которые встречаются в доказательстве основной теоремы.

Пусть в полосе $a \leq x \leq b$ плоскости xu даны две спрямленные кривые γ и $\bar{\gamma}$, однозначно проектирующиеся на ось x и, следовательно, допускающие задание уравнениями:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) \\ y &= \bar{\varphi}(x) \end{aligned} \quad a \leq x \leq b.$$

Пусть кривая γ расположена над кривой $\bar{\gamma}$, т. е. для всех x из указанного сегмента

$$\bar{\varphi}(x) < \varphi(x).$$

Пусть, наконец, A и B — две точки, расположенные на прямых $x=a$, $x=b$ между кривыми γ и $\bar{\gamma}$. Обозначим G замкнутую область в плоскости xu , ограниченную кривыми γ , $\bar{\gamma}$ и прямыми $x=a$, $x=b$.

Лемма 1. Среди всех кривых, соединяющих точки A и B в замкнутой области G , существует кратчайшая; обозначим ее $\tilde{\gamma}$. Эта кратчайшая единственная, однозначно проектируется на ось x -ов, а следовательно, допускает задание уравнением:

$$u = \tilde{\varphi}(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Доказательство. Существование кратчайшей вытекает из компактности множества кривых ограниченной длины, соединяющих две данные точки в замкнутой области, и свойства полунепрерывности длины кривой, которое состоит в том, что если кривые γ_n сходятся к кривой γ_0 , а их длины сходятся к l , то длина кривой γ_0 не превосходит l .

Покажем, что кривая $\tilde{\gamma}$ проектируется на ось x однозначно. Во-первых, заметим, что кривая $\tilde{\gamma}$ не имеет самопересечений, так как в противном случае возможно очевидное уменьшение ее длины.

Пусть g — произвольная прямая, параллельная оси u , проведенная между прямыми $x=a$ и $x=b$. Обозначим P_1 первую, а P_2 — последнюю точку кривой $\tilde{\gamma}$, лежащие на прямой g при следовании вдоль кривой из A в B . Доказать однозначную проектируемость кривой $\tilde{\gamma}$ на ось x это значит доказать, что для каждой прямой g $P_1 \equiv P_2$.

Допустим, для некоторой прямой g точки P_1 и P_2 различны. Тогда, очевидно, отрезок $\tilde{\gamma}$ между точками P_1 , P_2 должен быть прямолинейным отрезком, соединяющим эти точки.

Пусть Q_1 — середина отрезка P_1P_2 . Возьмём точку P на кривой $\tilde{\gamma}$, близкую к точке P_1 , не принадлежащую отрезку P_1P_2 . Пусть Q — четвертая вершина параллелограмма, тремя вершинами которого являются P, P_1, Q_1 . Тогда при достаточной близости P к P_1 прямолинейные отрезки PQ и Q_1Q лежат в G . Отсюда следует, что отрезок PP_1 кривой $\tilde{\gamma}$ должен быть прямолинейным отрезком, так как в противном случае отрезок PQ_1 кривой можно сократить, заменяя его ломаной PQQ_1 . Но тогда прямолинейный отрезок PQ_1 лежит в G и, следовательно, возможно сокращение кривой $\tilde{\gamma}$ заменой ее отрезка PQ_1 прямолинейным отрезком. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано. Итак, кривая $\tilde{\gamma}$ проектируется однозначно на ось x .

Докажем единственность кривой $\tilde{\gamma}$. Допустим, существуют две кривые $\tilde{\gamma} : \tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$. Обе кривые, естественно, имеют одну и ту же длину l . Возьмем в качестве параметра на кривых $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ сумму их дуг, отсчитываемых от точки A . При этом кривые будут заданы уравнениям:

$$\tilde{\gamma}_1 : \\ x = x_1(s), \quad y = y_1(s) \quad (0 \leq s \leq 2l),$$

$$\tilde{\gamma}_2 : \\ x = x_2(s), \quad y = y_2(s) \quad (0 \leq s \leq 2l),$$

где функции $x_1(s), x_2(s), y_1(s), y_2(s)$ удовлетворяют условию Липшица и по выбору параметра s $x_1(s) = x_2(s)$.

Рассмотрим кривую $\tilde{\gamma}$, задаваемую уравнениями:

$$x = \frac{1}{2}(x_1(s) + x_2(s)), \quad y = \frac{1}{2}(y_1(s) + y_2(s)).$$

Эта кривая, очевидно, проходит в G и спрямляема, так как функции $x_1(s) + x_2(s)$ и $y_1(s) + y_2(s)$ удовлетворяют условию Липшица, в частности, ограниченной вариации.

Покажем, что ее длина $\bar{l}$ не меньше l — длины кривых $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{2l} \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} ds &= l, \quad \int_0^{2l} \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2} ds = l, \\ \int_0^{2l} \sqrt{\left(\frac{x_1' + x_2'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1' + y_2'}{2}\right)^2} ds &= \bar{l}, \\ \int_a^b \left(\frac{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} + \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2}}{2} - \right. \\ \left. - \sqrt{\left(\frac{x_1' + x_2'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1' + y_2'}{2}\right)^2} \right) ds &= l - \bar{l}. \end{aligned}$$

Так как функция $\sqrt{u^2 + v^2}$ является выпуклой, то подинтегральное выражение в последней формуле неотрицательно. Поэтому $l \geq \bar{l}$. Но по условию минимальности кривых $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ $\bar{l} \geq l$. Отсюда следует $l = \bar{l}$. И так как интеграл от неотрицательной функции равен нулю, то подинтегральная функция должна быть равна нулю почти всюду. А равенство нулю подинтегральной функции возможно только при $x_1' = x_2'$, $y_1' = y_2'$.

Так как функции $x_1(s)$, $x_2(s)$, $y_1(s)$, $y_2(s)$ удовлетворяют условию Липшица и соответственно равны при $s=0$, то из равенства производных заключаем равенство функций. Итак, кривые $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ совпадают. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана полностью.

Лемма 2. Кривая $\tilde{\gamma}$, существование которой устанавливается леммой 1, непрерывно зависит от ограничивающих область G кривых γ , $\bar{\gamma}$ и положения точек A , B на прямых $x=a$, $x=b$.

Доказательство. Утверждение леммы в сущности сводится к следующему. Если даны последовательности кривых γ_n , $\bar{\gamma}_n$, сходящихся к кривым γ ; $\bar{\gamma}$ соответствен-

но, и последовательность пар точек A_n, B_n , сходящихся к A и B , то указанным образом построенные кривые $\tilde{\gamma}_n$ сходятся к кривой $\tilde{\gamma}$.

Если утверждение неверно, то существует подпоследовательность кривых $\tilde{\gamma}_n$, не сходящаяся к $\tilde{\gamma}$. Не ограничивая общности, можно считать, что она сходится к некоторой кривой $\tilde{\gamma}_0$. Кривая $\tilde{\gamma}_0$, очевидно, будет кратчайшей среди всех кривых в G , соединяющих точки A и B . А тогда по лемме 1 она должна совпадать с $\tilde{\gamma}$. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть каждая из кривых γ и $\bar{\gamma}$ состоит из конечного числа дуг алгебраических кривых, причем углы между полукасательными в каждой точке, разделяющей смежные дуги со стороны области G , не больше π . Тогда кривая $\tilde{\gamma}$ гладкая. Ее часть, расположенная существенно между кривыми γ и $\bar{\gamma}$, состоит из конечного числа прямолинейных отрезков, а оставшаяся часть состоит из выпуклых дуг алгебраических кривых, которые выпуклостью обращены в сторону G .

Доказательство. Покажем, во-первых, что, если в точке P , разделяющей две смежные дуги кривой γ (или $\bar{\gamma}$), угол между полукасательными со стороны G меньше π , то эта точка не может принадлежать $\tilde{\gamma}$. Заметим, что по условию леммы такая точка не может быть общей для кривых γ и $\bar{\gamma}$.

Проведем полупрямую g из точки P внутрь области G . Возьмем на γ две точки — M и N , близкие к P , расположенные по разные стороны от нее. При достаточной близости точек M и N к P отрезок MN пересекается с полупрямой g в некоторой точке Q — внутренней точке области G . Не ограничивая общности, можно считать, что на отрезке MN нет других точек кривой γ , кроме точек M и N . Кривая $\tilde{\gamma}$, чтобы достигнуть P , должна пересекать отрезок MN . Пусть M_1 и N_1 — первая и последняя точки пересечения кривой $\tilde{\gamma}$ с отрезком

MN . Тогда, заменяя отрезок M_1N_1 кривой $\tilde{\gamma}$ прямолинейным отрезком M_1N_1 , получим кривую, также расположенную в G , но меньшей длины, а это невозможно.

Покажем теперь, что часть кривой $\tilde{\gamma}$, расположенная внутри области G , состоит из конечного числа прямолинейных отрезков.

Пусть h — связная компонента множества тех точек кривой $\tilde{\gamma}$, которые являются внутренними точками G . Пусть P — произвольная точка h . Возьмем по разные стороны от нее точки M и N . Так как P — внутренняя точка G , то при достаточной близости M и N к P прямолинейный отрезок MN находится в G . Отсюда следует, что этот отрезок принадлежит h . И так как это имеет место для любой точки P , то h — прямолинейный отрезок, причем концы его принадлежат границе области G , т. е. кривым γ , $\bar{\gamma}$ или в точках A, B .

Пусть P — конец отрезка h — является точкой кривой γ (или $\bar{\gamma}$). По доказанному P является гладкой точкой кривой γ . Покажем, что отрезок h лежит на касательной кривой γ в точке P . Допустим, утверждение неверно. Тогда, очевидно, точка P не может принадлежать $\bar{\gamma}$. Проведем из точки P вертикальную полупрямую g_P внутрь области G , а через второй конец отрезка h — вертикальную прямую g и обозначим Q точку пересечения g с γ . Возьмем точку M на отрезке h , не совпадающую ни с одним из его концов. Пусть N — первая точка пересечения с кривой γ , которую мы встречаем следуя из M в Q по прямой.

Заменим кривую γ на отрезке PN ломаной PMN . При этом область G , ограниченная новой кривой γ и прежней кривой $\bar{\gamma}$, содержится в старой области G .

Поэтому свойство кривой $\tilde{\gamma}$ быть кратчайшей сохраняется, а вместе с тем в новой области G кривая $\tilde{\gamma}$ не может проходить через P , как показано выше. Итак, отрезок h касается кривой γ в точке P .

Так как конечное число алгебраических кривых могут иметь только конечное число общих касательных с различными точками касания, то число прямолинейных отрезков h кривой $\tilde{\gamma}$ конечно. И оставшаяся часть

кривой γ составлена, таким образом, из конечного числа дуг s алгебраических кривых, принадлежащих γ и $\bar{\gamma}$. Пусть s — одна из таких дуг.

Дугу s можно разбить на конечное число выпуклых дуг s_k , для каждой из которых выполняется одно из следующих условий:

- 1) s_k принадлежит γ , но не принадлежит $\bar{\gamma}$;
- 2) s_k принадлежит $\bar{\gamma}$, но не принадлежит γ ;
- 3) s_k принадлежит и γ и $\bar{\gamma}$.

Покажем, что в каждом из случаев дуга s_k обращена выпуклостью в сторону G (прямолинейный отрезок считается выпуклым в обе стороны). Действительно, в первом и втором случае, если s_k обращена наружу G , кривая γ допускает очевидное уменьшение длины. В третьем случае условие выпуклости в сторону G всегда выполнено, надо только относить s_k к соответствующей кривой γ или $\bar{\gamma}$.

Лемма доказана.

Пусть даны две конечные системы алгебраических поверхностей $\{F_k\}$ и $\{\bar{F}_k\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) каждая из поверхностей F_k и $\bar{F}_k$ однозначно проектируется на плоскость xu ;

2) проекция всех поверхностей системы $\{F_k\}$, а также проекция всех поверхностей системы $\{\bar{F}_k\}$ покрывает прямоугольник

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d;$$

3) если P точка границы какой-нибудь поверхности $F_i(\bar{F}_i)$, проектирующаяся на прямоугольник, то всегда найдется внутренняя точка Q на некоторой поверхности $F_j(\bar{F}_j)$, которая имеет ту же проекцию на плоскость xu , что и P , и расположена ниже (соответственно выше) точки P ;

4) точки пересечения любой прямой, параллельной оси z , с поверхностями F_k расположены не ниже точек пересечения ее с поверхностями $\bar{F}_k$.

Пусть

$$z = f_k(x, y),$$

$$z = \bar{f}_k(x, y)$$

уравнения поверхностей F_k и $\bar{F}_k$ соответственно. Определим две функции $\varphi(x, y)$ и $\bar{\varphi}(x, y)$ в прямоугольнике $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ условиями:

$$\varphi(x, y) = \min_k f_k(x, y), \quad \bar{\varphi}(x, y) = \max_k \bar{f}_k(x, y).$$

Очевидно, эти функции непрерывны и кусочно-алгебраические.

Обозначим Φ и $\bar{\Phi}$ кусочно-алгебраические поверхности, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} z &= \varphi(x, y) \\ z &= \bar{\varphi}(x, y) \end{aligned} \quad (a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d).$$

Относительно этих поверхностей существенно заметить следующее. Во-первых, поверхность Φ расположена над поверхностью $\bar{\Phi}$. Во-вторых, любая плоскость $y = \eta$ ($c \leq \eta \leq d$) пересекает поверхности Φ и $\bar{\Phi}$ по кривым γ_η и $\bar{\gamma}_\eta$, которые составлены из конечного числа алгебраических дуг, причем в точках, принадлежащих двум смежным дугам кривой γ_η , угол, образованный полукасательными, обращен вершиной в сторону $z > 0$, а у кривой $\bar{\gamma}_\eta$ в сторону $z < 0$.

Пусть в плоскостях $x = a$ и $x = b$ даны две алгебраические кривые — γ_1 и γ_2 , расположенные между поверхностями Φ и $\bar{\Phi}$, однозначно проектирующиеся на ось y . Обозначим A_η и B_η точки пересечения кривых γ_1 и γ_2 с плоскостью $y = \eta$. Соединим точки A_η и B_η в плоскости $y = \eta$ кратчайшей $\tilde{\gamma}_\eta$, расположенной между кривыми γ_1 и γ_2 .

Лемма 4. При изменении η от c к d кривая $\tilde{\gamma}_\eta$ описывает кусочно-аналитическую поверхность $\tilde{\Phi}$ (нитяную поверхность), однозначно проектирующуюся на прямоугольник $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$.

Та часть поверхности $\tilde{\Phi}$, которая расположена существенно между поверхностями Φ и $\bar{\Phi}$, состоит из линейчатых аналитических поверхностей, а остальная часть из кусков аналитических поверхностей F_k и $\bar{F}_k$.

Нарушение гладкости поверхности $\tilde{\Phi}$ происходит только на конечном числе кривых $\tilde{\gamma}_\eta$, причем если точка P нарушения гладкости принадлежит $\Phi(\Phi)$, то двугранный угол, образуемый касательными полуплоскостями $\Phi(\tilde{\Phi})$ в этой точке со стороны области, ограничиваемой поверхностями Φ и $\tilde{\Phi}$, меньше π

Доказательство. То что кривая $\tilde{\gamma}_\eta$ описывает поверхность, однозначно проектирующуюся на прямоугольник, следует из того, что кривая $\tilde{\gamma}_\eta$ проектируется однозначно на прямую $y = \eta$ плоскости xu и непрерывно зависит от кривых γ_η , $\bar{\gamma}_\eta$ и точек A_η , B_η .

То, что часть поверхности $\tilde{\Phi}$, расположенная существенно внутри области, ограниченной поверхностями Φ и $\tilde{\Phi}$, состоит из аналитических линейчатых поверхностей, следует из того, что эта часть описывается прямолинейными отрезками кривой $\tilde{\gamma}_\eta$, которые на концах касаются алгебраических поверхностей или опираются на аналитические кривые (γ_1, γ_2) . Число линейчатых поверхностей конечно потому, что число алгебраических поверхностей F_k и $\bar{F}_k$ конечно.

Нарушение гладкости $\tilde{\Phi}$ на конечном числе кривых $\tilde{\gamma}_\eta$ объясняется также тем, что Φ и $\tilde{\Phi}$ составлены из конечного числа алгебраических поверхностей.

Пусть точка P нарушения гладкости $\tilde{\Phi}$ принадлежит Φ . Обозначим $\vartheta(P)$ угол, образуемый касательными полуплоскостями поверхности $\tilde{\Phi}$ в этой точке со стороны области, ограничиваемой поверхностями Φ и $\tilde{\Phi}$. Покажем, что $\vartheta(P) \leq \pi$.

Действительно, точка P принадлежит одной из поверхностей F_k и является гладкой точкой этой поверхности. Поверхность Φ в окрестности P расположена под F_k , тем более под поверхностью F_k расположена поверхность $\tilde{\Phi}$, и, следовательно, угол $\vartheta(P)$ никак не может быть больше π со стороны указанной области.

Случай, когда точка P принадлежит Φ , рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

§ 2. Специальное сглаживание нитяной поверхности

Пусть Φ — кусочно-аналитическая поверхность, однозначно проектирующаяся на прямоугольник

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \quad (c < 0 < d).$$

Пусть

$$z = \varphi(x, y)$$

уравнение этой поверхности, где $\varphi(x, y)$ кусочно-аналитическая функция в указанном прямоугольнике, удовлетворяющая условиям:

1) производная $\partial\varphi/\partial x$ непрерывна во всем прямоугольнике $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$;

2) производная $\partial\varphi/\partial y$ терпит разрыв только на оси x , причем скачок производной при переходе через ось x меньше ε ;

3) в каждой точке оси x , где существует $\partial^2\varphi/\partial x^2$,

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 \Delta \partial\varphi/\partial y \leq 0,$$

где $\Delta \partial\varphi/\partial y$ — изменение производной $\partial\varphi/\partial y$ при переходе в данной точке оси x от $y < 0$ к $y > 0$.

Лемма 1. Поверхность Φ :

$$z = \varphi(x, y) \quad (a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d),$$

удовлетворяющая перечисленным выше условиям, допускает приближение аналитической поверхности Φ^* :

$$z = \varphi^*(x, y) \quad (a \leq x \leq b), \quad c \leq y \leq d),$$

обладающее следующими свойствами:

1) $|\varphi(x, y) - \varphi^*(x, y)| < \varepsilon_1$ для всех точек (x, y) прямоугольника;

2) для всех точек прямоугольника, где существуют производные $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y$

$$|\partial\varphi/\partial x - \partial\varphi^*/\partial x| < \varepsilon_2, \quad |\partial\varphi/\partial y - \partial\varphi^*/\partial y| < \varepsilon_2;$$

3) положительная кривизна поверхности Φ в области регулярности отличается от положительной кривизны поверхности Φ^* меньше, чем на ε_3 .

Величины ε_1 и ε_2 можно считать сколь угодно малыми, а ε_3 мало вместе с ε , характеризующим степень нарушения гладкости поверхности Φ .

Доказательство. Во-первых, заметим, что для доказательства теоремы достаточно построить гладкую кусочно-аналитическую поверхность, обладающую свойствами 1, 2, 3. Приближение последней с помощью аналитической с сохранением указанных свойств, как известно, не составляет труда.

Пусть λ — малое положительное число. Определим в прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ функцию $\psi(x, y)$, полагая

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) \text{ при } |y| \geq \lambda$$

$$\psi(x, y) = \alpha(x)y^3 + \beta(x)y^2 + \gamma(x)y + \delta(x) \text{ при } |y| \leq \lambda,$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ подобраны так, чтобы при $|y| = \lambda$

$$\varphi(x, y) = \psi(x, y) \text{ и } \partial\varphi(x, y)/\partial y = \partial\psi(x, y)/\partial y.$$

Утверждается, что функция $\psi(x, y)$ при достаточно малом λ гладкая, кусочно-аналитическая и обладает свойствами 1, 2, 3, указанными в лемме. Докажем это.

Функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ указанными условиями определяются однозначно. Опуская соответствующие вычисления, приведем окончательный результат:

$$\alpha = \frac{1}{4\lambda^3} \{ \lambda(\varphi_y^+ + \varphi_y^-) - (\varphi^+ - \varphi^-) \};$$

$$\beta = \frac{1}{4\lambda} (\varphi_y^+ - \varphi_y^-);$$

$$\gamma = \frac{1}{4\lambda} \{ 3(\varphi^+ - \varphi^-) - \lambda(\varphi_y^+ + \varphi_y^-) \};$$

$$\delta = \frac{1}{4} \{ 2(\varphi^+ + \varphi^-) - \lambda(\varphi_y^+ - \varphi_y^-) \},$$

где плюс или минус, поставленные индексом, указывают на то, что второй аргумент функции (y) полагается равным $+\lambda$ или $-\lambda$ соответственно.

Подставляя эти значения для α , β , γ и δ в $\psi(x, y)$, получаем для нее в области $|y| \leq \lambda$ следующее выражение:

$$\begin{aligned}\psi(x, y) = & \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-) + \\ & + (\varphi^+ - \varphi^-) \left(-\frac{y^3}{4\lambda^3} + \frac{3y}{4\lambda} \right) + \\ & + (\varphi_y^+ + \varphi_y^-) \left(\frac{y^3}{4\lambda^2} - \frac{y}{4} \right) + \\ & + (\varphi_y^+ - \varphi_y^-) \left(\frac{y^2}{4\lambda} - \frac{\lambda}{4} \right).\end{aligned}$$

Так как при малых λ величина $\varphi^+ - \varphi^-$ имеет порядок λ , то при $|y| \leq \lambda$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-) + O(\lambda),$$

где $O(\lambda)$ — некоторая функция, имеющая порядок λ . Отсюда следует по непрерывности функции $\varphi(x, y)$, что

$$|\varphi(x, y) - \psi(x, y)|$$

сколь угодно мало, если мало λ .

Дифференцируя функцию $\psi(x, y)$ по x и замечая, что $|\varphi_{xy}^+ - \varphi_{xy}^-|$ имеет порядок λ , мы дословно таким же рассуждением приходим к выводу, что

$$|\varphi_x(x, y) - \psi_x(x, y)|$$

сколь угодно мало, если мало λ .

Рассмотрим теперь

$$|\varphi_y(x, y) - \psi_y(x, y)|.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\psi_y(x, y) = & (\varphi^+ - \varphi^-) \left(-\frac{3y^2}{4\lambda^3} + \frac{3}{4\lambda} \right) + \\ & + (\varphi_y^+ + \varphi_y^-) \left(\frac{3y^2}{4\lambda^2} - \frac{1}{4} \right) + \\ & + (\varphi_y^+ - \varphi_y^-) \left(\frac{y}{2\lambda} \right).\end{aligned}$$

При малых λ

$$\varphi^+ = \varphi^0 + \lambda \varphi_y^+ + O(\lambda^2),$$

$$\varphi^- = \varphi^0 - \lambda \varphi_y^- + O(\lambda^2),$$

где φ^0 обозначено $\varphi(x, 0)$. Поэтому

$$\psi_y = \frac{1}{2}(\varphi_y^+ + \varphi_y^-) + \frac{y}{2\lambda}(\varphi_y^+ - \varphi_y^-) + O(\lambda).$$

Отсюда видно, что

$$|\varphi_y(x, y) - \psi_y(x, y)|$$

мало вместе с λ и ε .

Покажем, наконец, что изменение положительной кривизны при переходе от поверхности $z = \varphi(x, y)$ к поверхности $z = \psi(x, y)$ сколь угодно мало, если достаточно мало λ .

Во-первых, поверхности $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$ отличаются только в области $|y| < \lambda$. В этой области положительная кривизна поверхности $z = \varphi(x, y)$ мала вместе с λ . Таким образом, нам надо показать, что положительная кривизна поверхности $z = \psi(x, y)$ в области $|y| < \lambda$ мала вместе с λ .

Положительная кривизна поверхности $z = \psi(x, y)$ в области $|y| \leq \lambda$

$$\omega^+ = \int \frac{\psi_{xx}\psi_{yy} - \psi_{xy}^2}{(1 + \psi_x^2 + \psi_y^2)^{3/2}} dx dy,$$

где интегрирование распространяется на ту часть области $|y| \leq \lambda$, где подынтегральная функция положительна.

Чтобы оценить величину интеграла, которым определяется положительная кривизна поверхности $z = \psi(x, y)$, рассмотрим вторые производные функции $\psi(x, y)$ при $|y| \leq \lambda$. Именно, покажем прежде всего, что при $|y| \leq \lambda$ ψ_{xx} , ψ_{xy} и $\lambda \psi_{yy}$ равномерно ограничены. Для этого снова воспользуемся явным выражением для $\psi(x, y)$ в области $|y| \leq \lambda$.

Дифференцируя выражение для $\psi(x, y)$ два раза по x , заключаем об ограниченности ψ_{xx} просто на основании равномерной ограниченности вторых и третьих производных φ в областях ее аналитичности.

Дифференцируя $\psi(x, y)$ по x и y , получим:

$$\begin{aligned}\psi_{xy}(x, y) &= (\varphi_x^+ - \varphi_x^-) \left(-\frac{3y^2}{4\lambda^3} + \frac{3}{4\lambda} \right) + \\ &+ (\varphi_{xy}^+ + \varphi_{xy}^-) \left(\frac{3y^2}{4\lambda^2} - \frac{1}{4} \right) + \\ &+ (\varphi_{xy}^+ - \varphi_{xy}^-) \frac{y}{2\lambda}.\end{aligned}$$

Второй и третий члены этого выражения ограничены в силу ограниченности вторых производных функции φ . Что касается первого члена, то, так как функция $\varphi_x(x, y)$ непрерывна, он допускает представление:

$$\left(\frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi_{xy} dy \right) \left(-\frac{3y^2}{4\lambda^2} + \frac{3}{4} \right).$$

Первый сомножитель этого выражения ограничен из-за ограниченности производной φ_{xy} , а второй ограничен очевидным образом. Итак, производная ψ_{xy} ограничена.

Следует заметить, что последние заключения относятся к тем точкам рассматриваемой области, где производные φ существуют. Но таковы почти все точки области задания функции φ , поэтому λ , например, всегда можно выбрать так, чтобы на прямых $y = \pm \lambda$ встречающиеся производные функции φ существовали почти везде.

Покажем ограниченность $\lambda\psi_{yy}$. Дифференцируя выражение ψ два раза по y , получаем:

$$\begin{aligned}\lambda\psi_{yy} &= -\frac{3y}{2\lambda^2} (\varphi^+ - \varphi^-) + \\ &+ \frac{3y}{2\lambda} (\varphi_y^+ + \varphi_y^-) + \\ &+ \frac{1}{2} (\varphi_y^+ - \varphi_y^-).\end{aligned}$$

Ограниченность второго и третьего слагаемого следует из ограниченности производных функции φ . Первое слагаемое допускает представление

$$-\frac{3y}{2\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi_y dy \right)$$

и, следовательно, ограничено по той же причине. Итак, величина $\lambda \psi_{yy}$ ограничена.

Поверхность $z = \varphi(x, y)$ состоит из конечного числа аналитических поверхностей, разделяемых аналитическими кривыми. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_s$ — точки оси x , лежащие на границе областей аналитичности функции φ , расположенных со стороны $y > 0$, и $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_s$ — точки, лежащие на границе областей аналитичности со стороны $y < 0$. Число тех и других конечно. Пусть $B_1, B_2, \dots, B_t$ — точки оси x , в которых φ_{xx} обращается в нуль, но не равна нулю, тождественно в окрестности. По причине аналитичности кусков поверхности φ число таких точек также конечно.

Построим для каждой точки $A_i, \bar{A}_i$ и B_i содержащий ее интервал δ так, чтобы общая длина интервалов не превосходила ε' . Множество, составленное из интервалов δ , обозначим D .

Часть отрезка (ab) оси x , не покрытая интервалами δ , состоит из отрезков $\bar{\delta}$. В достаточно малой полуокрестности каждого отрезка $\bar{\delta}$ со стороны $y > 0$ и со стороны $y < 0$ функция $\varphi(x, y)$ аналитическая. Возьмем λ настолько малым, чтобы функция $\varphi(x, y)$ была аналитической внутри каждого прямоугольника со стороной $\bar{\delta}$ и параллельной стороной на $y = \pm \lambda$.

Множество точек, принадлежащих отрезкам $\bar{\delta}$, разобьем на два подмножества — D' и D'' . В D' отнесем все точки, где $|\varphi_{xx}| < \varepsilon''$, а в D'' — точки, где $|\varphi_{xx}| \geq \varepsilon''$.

Обозначим D_λ, D'_λ и D''_λ множества точек прямоугольника $a \leq x \leq b, |y| \leq \lambda$, которые проектируются на ось x в множества D, D' и D'' соответственно. Положим для краткости

$$\frac{\psi_{xx} \psi_{yy} - \psi_{xy}^2}{(1 + \psi_x^2 + \psi_y^2)^{3/2}} = \Omega.$$

Обозначим, наконец, G_λ множество точек (x, y) , в которых $|y| \leq \lambda$ и $\Omega > 0$. Тогда

$$\omega^+ = \int_{G_\lambda} \Omega dx dy = \int_{G_\lambda \cap D_\lambda} \Omega dx dy + \int_{G_\lambda \cap D'_\lambda} \Omega dx dy + \int_{G_\lambda \cap D''_\lambda} \Omega dx dy.$$

Третий интеграл правой части равенства при достаточно малом λ равен нулю, так как $G_\lambda \cap D''_\lambda$ пусто. Действительно, так как в каждой компоненте D''_λ функция φ аналитическая при $y \leq 0$ и при $y \geq 0$, то при достаточно малом λ

$$\psi_{xx}(x, y) = \varphi_{xx}(x, 0) + O(\lambda)$$

$$\psi_{yy}(x, y) = \frac{1}{2\lambda} (\varphi_y(x, +0) - \varphi_y(x, -0)) + O(1).$$

По условию леммы

$$\varphi_{xx}(x, 0) (\varphi_y(x, +0) - \varphi_y(x, -0)) < 0.$$

Поэтому при достаточно малом λ в D''_λ $\Omega < 0$ и, следовательно, в D''_λ нет точек G_λ .

Оценим теперь

$$\int_{G_\lambda \cap D'_\lambda} \Omega dx dy.$$

По той же причине, что и для D''_λ , в D'_λ имеют место данные выше представления для ψ_{xx} и ψ_{yy} . И так как в D' $|\varphi_{xx}| < \varepsilon''$, то при малом λ в D'_λ

$$|\psi_{xx}\psi_{yy}| < \frac{c\varepsilon''}{\lambda},$$

где c — постоянная, не зависящая от λ и ε'' . Что касается смешанной производной ψ_{xy} , то она оценена раньше. Принимая во внимание, что площадь области интегрирования $G_\lambda \cap D'_\lambda$ не больше $(b-a)\lambda$, заключаем, что

$$\int_{G_\lambda \cap D'_\lambda} \Omega dx dy$$

оценивается величиной ε'' и, следовательно, мал, если мало ε'' .

Оценим, наконец,

$$\int_{G_\lambda \cap D_\lambda} \Omega \, dx \, dy.$$

Так как при $|y| \leq \lambda$ ψ_{xx} , $\lambda \psi_{yy}$ и ψ_{xy} равномерно ограничены, то подинтегральная функция имеет порядок не более чем $\frac{1}{\lambda}$. Что же касается площади области инте-

грирования, то она не больше $\epsilon' \lambda$. Поэтому величина интеграла мала вместе с ϵ' .

Резюмируя вышеизложенное, заключаем, что при достаточно малом λ положительная кривизна поверхности $z = \psi(x, y)$ в области $|y| \leq \lambda$ сколь угодно мала.

Лемма доказана полностью.

Лемма 2. Пусть

$$z = \varphi(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

являющаяся поверхностью, существование которой устанавливается леммой 4 § 1. Тогда существует аналитическая поверхность

$$z = \psi(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

удовлетворяющая следующим условиям:

$$1) |\varphi(x, y) - \psi(x, y)| < \epsilon_1;$$

$$2) |\partial \varphi / \partial x - \partial \psi / \partial x| < \epsilon_2, \quad |\partial \varphi / \partial y - \partial \psi / \partial y| < \epsilon_2;$$

3) каково бы ни было множество M_φ в области регулярности поверхности φ ,

$$|\sigma^+(M) - \sigma^+(M_\psi)| < \epsilon_3,$$

где M_ψ — множество на поверхности ψ , в которое проектируется M_φ прямыми, параллельными оси z .

Числа ϵ_1 и ϵ_3 можно считать сколь угодно малыми, а ϵ_2 мало, если малы скачки производных φ в точках нарушения гладкости.

Эта лемма по существу следует из леммы 1.

§ 3. О прямолинейных образующих гладкой поверхности

Прямолинейный отрезок g на гладкой поверхности мы будем называть *изолированным*, если не существует последовательности прямолинейных отрезков на поверхности, сходящихся к g .

Лемма 1. Множество изолированных прямолинейных отрезков на поверхности не более чем счетно.

Доказательство. Сопоставим каждому прямолинейному отрезку, лежащему на поверхности, шесть величин $x_1, x_2, \dots, x_6$, из коих первые три являются декартовыми координатами одного конца отрезка, а остальные три — декартовы координаты другого конца. Таким образом, каждому отрезку на поверхности будет сопоставлена точка шестимерного евклидова пространства $(x_1, \dots, x_6)$.

Обозначим H множество точек этого пространства, соответствующих указанным образом прямолинейным отрезкам поверхности. Очевидно, если отрезок g изолированный, то соответствующая ему точка $X_g \in H$ является изолированной точкой. А множество изолированных точек H не более чем счетно.

Лемма доказана.

Пусть g не изолированный прямолинейный отрезок на поверхности. Тогда, если среди прямолинейных отрезков g_n , сходящихся к g , найдутся сколь угодно близкие к g , расположенные с ним в одной плоскости, то касательная плоскость поверхности вдоль g стационарна. Докажем это.

Не ограничивая общности, можно считать, что отрезок g расположен в плоскости xz . Пусть A и B — две произвольные внутренние точки отрезка g . Проведем через них плоскости, перпендикулярные к оси x . Они пересекут поверхность по кривым γ_A и γ_B соответственно. Обозначим A_n и B_n точки пересечения кривых γ_A и γ_B с отрезком g_n , который лежит в одной плоскости с отрезком g .

Положим,

$$\xi_A^n = \begin{cases} \frac{z(A_n) - z(A)}{y(A_n) - y(A)}, & \text{если } A_n \neq A, \\ \partial z / \partial y|_A, & \text{если } A_n = A, \end{cases}$$

$$\xi_B^n = \begin{cases} \frac{z(B_n) - z(B)}{y(B_n) - y(B)}, & \text{если } B_n \neq B, \\ \partial z / \partial y|_B, & \text{если } B_n = B, \end{cases}$$

Так как $\xi_A^n = \xi_B^n$, а при $n \rightarrow \infty$

$$\xi_A^n \rightarrow \partial z / \partial y|_A \text{ и } \xi_B^n \rightarrow \partial z / \partial y|_B,$$

то

$$\partial z / \partial y|_A = \partial z / \partial y|_B.$$

Равенство производных $\partial z/\partial x$ в точках A и B очевидно. Утверждение доказано.

Лемма 2. Если угол между нормальными поверхностями на концах неизолированного прямолинейного отрезка g меньше ϑ , то угол между нормальными в двух любых точках отрезка также меньше ϑ .

Доказательство. Будем считать, что отрезок g расположен в плоскости xz . Если среди отрезков g_n , сходящихся к g , существуют сколь угодно близкие к g , расположенные с ним в одной плоскости, то утверждение леммы очевидно, так как в этом случае касательная плоскость вдоль отрезка g стационарна.

Возьмем точки A и B на отрезке g , близкие к его концам, и пусть C — точка отрезка, делящая расстояние между A и B в отношении $\lambda: (1 - \lambda)$. Так же, как и в предыдущем рассмотрении, проведем через точки A, B, C плоскости, перпендикулярные к оси x , и обозначим A_k, B_k и C_k пересечения их с отрезком g_k . В связи с замечанием, сделанным выше, можно считать, что $A_k \neq A, B_k \neq B$ и $C_k \neq C$.

Для доказательства леммы, очевидно, достаточно показать, что производная $\partial z/\partial u$ в точке C заключена между производными в точках A и B .

Положим,

$$\xi_A^n = \frac{z(A_n) - z(A)}{y(A_n) - y(A)},$$

$$\xi_B^n = \frac{z(B_n) - z(B)}{y(B_n) - y(B)},$$

$$\xi_C^n = \frac{z(C_n) - z(C)}{y(C_n) - y(C)}.$$

Из геометрических соображений ясно, что ξ_C^n заключено между ξ_A^n и ξ_B^n . В этом можно убедиться и вычислениями, если принять во внимание известные соотношения между координатами трех точек на прямой.

Отсюда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, заключаем, что производная $\partial z/\partial u|_C$ заключена между производными $\partial z/\partial u|_A$ и $\partial z/\partial u|_B$.

Лемма доказана.

Лемма 3. Если вдоль неизолированного прямолинейного отрезка касательная плоскость поверхности не стационарна, то

$$\mu_{A, B}^{n, m} = \frac{y(B_n) - y(B_m)}{y(A_n) - y(A_m)}$$

при $n, m \rightarrow \infty$ стремится к определенному, отличному от нуля пределу.

Доказательство. Во-первых, при достаточно больших m и n отрезки g_m и g_n не могут пересекаться, так как отсюда немедленно следовало бы, что касательная плоскость вдоль отрезка g стационарна.

Рассмотрим три отношения:

$$\alpha = \frac{z(A_n) - z(A_m)}{y(A_n) - y(A_m)},$$

$$\beta = \frac{z(B_n) - z(B_m)}{y(B_n) - y(B_m)},$$

$$\gamma = \frac{z(C_n) - z(C_m)}{y(C_n) - y(C_m)}.$$

Принимая во внимание известное соотношение между координатами точек A_k , B_k и C_k :

$$x(C_k) = \lambda x(A_k) + (1 - \lambda)x(B_k),$$

$$y(C_k) = \lambda y(A_k) + (1 - \lambda)y(B_k),$$

$$z(C_k) = \lambda z(A_k) + (1 - \lambda)z(B_k),$$

получаем:

$$\mu_{A, B}^{n, m} = - \frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{(1 - \lambda)(\beta - \gamma)}.$$

При $m, n \rightarrow \infty$

$$\alpha \rightarrow \partial z / \partial y|_A, \quad \beta \rightarrow \partial z / \partial y|_B, \quad \gamma \rightarrow \partial z / \partial y|_C,$$

И так как

$$\partial z / \partial y|_A \neq \partial z / \partial y|_C \neq \partial z / \partial y|_B,$$

то при $m, n \rightarrow \infty$

$$\mu_{A, B}^{n, m} \rightarrow \mu_{A, B} = - \frac{\lambda(\partial z / \partial y|_A - \partial z / \partial y|_C)}{(1 - \lambda)(\partial z / \partial y|_B - \partial z / \partial y|_C)}.$$

Лемма доказана.

Сопоставим каждому неизолированному отрезку g , параллельному плоскости xz , число ϑ_g , равное углу между нормалью поверхности на его концах. Если ϑ_g отлично от нуля, то отнесем отрезку g еще число μ_g , равное пределу величины $\mu_{A, B}^g$, когда точки A и B неограниченно приближаются к концам отрезка g .

Лемма 4. Множество G_ε отрезков g длины не меньше $l > 0$, для которых $\vartheta_g \geq \varepsilon > 0$ и $|\mu_g - 1| \geq \varepsilon$ конечно.

Доказательство. Допустим, G_ε бесконечно. Тогда в нем можно выделить сходящуюся последовательность g_n . Она сходится к некоторому отрезку g_0 .

$$\vartheta_{g_n} \rightarrow \vartheta_{g_0}.$$

Так как $\vartheta_{g_n} \geq \varepsilon$, то и $\vartheta_{g_0} \geq \varepsilon$. Отсюда следует, что μ_{g_0} существует и является пределом μ_{g_n} в частности $|\mu_{g_0} - 1| \geq \varepsilon$.

С другой стороны, так как отрезок g_0 является пределом отрезков g_n , параллельных плоскости xz , $\mu_{g_0} = 1$. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Пусть отрезок $g \subset G_\varepsilon$ на поверхности F расположен в плоскости $y = t = \text{const}$. Проведем через каждую точку P отрезка в плоскости $x = x_P$ прямую g_P , касающуюся поверхности F в точке P . Отрезки $g_P (P \subset g)$ образуют *аналитическую* линейчатую поверхность F_g (гиперболический параболоид).

Действительно, коэффициент наклона прямой g_P в произвольной точке P , делящей расстояние между концами в отношении $\lambda : (1 - \lambda)$ через коэффициенты наклона прямых, соответствующих концевым точкам, выражается формулой

$$k_P = \frac{\lambda \mu_g k_1 + (1 - \lambda) k_2}{\lambda \mu_g + (1 - \lambda)}$$

и, таким образом, представляет собой аналитическую функцию λ . Отсюда следует, что поверхность F_g аналитическая.

Построим в плоскости $y = t$ две кривые γ^+ и γ^- следующим образом. На отрезке g возьмем близкие к концам A и B точки $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Сместим точки A и B

в направлении $z > 0$ на расстояние $\bar{h}$. Кривая γ^+ состоит из прямолинейного отрезка $\overline{AB}$ и двух парабол, которые касаются g в точках $\overline{A}$, $\overline{B}$ и проходят через точки $A_{\bar{h}}$ и $B_{\bar{h}}$, полученные смещением A и B . Кривая γ строится аналогично, только точки A и B смещаются на $\bar{h}$ в направлении $z < 0$.

Теперь построим поверхности F_g^+ и F_g^- . Через каждую точку P кривой γ^+ проведем параболу в плоскости $x = x_P$ так, чтобы ее наклон в P был равен наклону той прямолинейной образующей поверхности F_g , которая лежит в плоскости $x = x_P$, а коэффициент при y^2 равен $\bar{\varepsilon}/\bar{h}$. Эти параболы образуют гладкую кусочно-аналитическую поверхность F_g^+ . Поверхность F_g^- строится аналогично, только вместо кривой γ^+ берется γ^- , а коэффициент при y^2 у парабол — $\bar{\varepsilon}/\bar{h}$.

Сместим поверхность F_g в направлении $z > 0$ на расстояние $\bar{h}$. При этом некоторая часть поверхности F_g^+ окажется под поверхностью F_g . Обозначим ее $\tilde{F}_g^+$. Относительно этой поверхности существенно заметить следующее:

1. При достаточно малом $\bar{h}$ и фиксированном $\bar{\varepsilon}$ ее край расположен над поверхностью F .
2. Проекция $\tilde{F}_g^+$ на плоскость xu расположена в $\bar{h}/\sqrt{\bar{\varepsilon}}$ — окрестности проекции отрезка g .
3. Абсолютная кривизна поверхности $\tilde{F}_g^+$ мала вместе с $\bar{\varepsilon}$ (имеет порядок $\bar{\varepsilon}$).

Все перечисленные свойства поверхности $\tilde{F}_g^+$ проверяются непосредственными вычислениями. Поверхность F_g^- определяется аналогично с помощью поверхности F_g^- и обладает аналогичными свойствами.

Сместим поверхность F на малое расстояние h ($h \ll \bar{h}$) в направлении $z > 0$ и $z < 0$ в положения F^+ и F^- соответственно так, чтобы край поверхности

$\tilde{F}_g^+$ был над F^+ , а край $\tilde{F}_g^-$ — под F^- . Пусть $\tilde{G}_g^+$ — компонента разбиения поверхности $\tilde{F}_g^+$ поверхностью F^+ , содержащая отрезок $g_{\bar{A}\bar{B}}$. Преобразуем поверхность F^+ , заменив в ней область $\tilde{G}_g^+$ ту часть, в которую эта область проектируется прямыми, параллельными оси z . Полученную поверхность обозначим $\tilde{F}^+$. Поверхность $\tilde{F}^-$ определяется аналогично с помощью поверхности $\tilde{F}_g^-$.

Лемма 5. Пусть M — множество прямолинейных отрезков длины не меньше l , параллельных плоскости xz , расположенных между поверхностями $\tilde{F}^+$ и $\tilde{F}^-$. Тогда существует $d > 0$ такое, что каково бы ни было $\bar{\varepsilon} > 0$, при достаточно малом $\bar{h}$ в d -окрестности отрезка g , не будет отрезков из M , кроме самого g .

Доказательство. Допустим, утверждение неверно и g' отрезок из M , расположенный в d -окрестности отрезка g . Пусть P' и Q' — точки отрезка g' , делящие его на три равные части, а S' — точка, расположенная между ними и делящая отрезок $P'Q'$ в отношении $\lambda : (1 - \lambda)$. Проведем через каждую из этих точек плоскость, параллельную плоскости yz . При достаточно малом d эти плоскости пересекают отрезок g в точках P , Q и S соответственно.

Рассмотрим три отношения:

$$\xi_A = \frac{z(A) - z(\bar{A})}{y(A) - y(\bar{A})}, \quad \xi_B = \frac{z(B) - z'(\bar{B})}{y(B) - y(\bar{B})}, \quad \xi_C = \frac{z(C) - z(\bar{C})}{y(C) - y(\bar{C})}.$$

Если d и $\bar{h}/V_{\bar{\varepsilon}}$ достаточно малы, эти отношения близки к $\partial z/\partial y|_A$, $\partial z/\partial y|_B$ и $\partial z/\partial y|_C$ соответственно. Следовательно,

$$\xi_C = \frac{\lambda \mu_{\sigma} \xi_A + (1 - \lambda) \xi_B}{\gamma \mu_g + (1 - \lambda)} + \tilde{\varepsilon},$$

где $\tilde{\varepsilon}$ сколь угодно мало, если малы d и $\bar{h}/V_{\bar{\varepsilon}}$. С другой стороны, очевидно,

$$\xi_C = \lambda \xi_A + (1 - \lambda) \xi_B.$$

Так как $|\xi_A - \xi_B|$ ограничено снизу положительным числом ($\theta_g \neq 0$), а $\mu_g \neq 0$, то при $\lambda = \frac{1}{2}$ и достаточно

малом ε эти два выражения для ξ_c заведомо различны. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

§ 4. Приближение поверхностей ограниченной внешней кривизны регулярными поверхностями

Теорема. Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны и X — произвольная точка на этой поверхности. Тогда у точки X есть окрестность U_X такая, что существует последовательность регулярных, даже аналитических поверхностей F_n , сходящихся к F в U_X вместе со сферическими изображениями и положительными кривизнами, слабо сходящимися к положительной кривизне F .

Точный смысл этой теоремы состоит в следующем. Сходимость поверхностей F_n к F в окрестности U_X предполагает некоторый гомеоморфизм f_n поверхности F на F_n , определенный в U_X . В теореме утверждается, во-первых, что при достаточно большом n расстояния между соответствующими точками поверхностей F и F_n , а также углы между касательными поверхностей в этих точках сколь угодно малы.

Далее, в силу гомеоморфизма f_n каждому множеству $E \subset U_X$ сопоставлено некоторое множество $f_n(E)$ на F_n . Пусть $\sigma_n^+(E)$ — его положительная кривизна. Тогда в теореме утверждается, что какова бы ни была непрерывная функция $\psi(Y)$, заданная в U_X ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_X} \psi(Y) d\sigma_n^+(E(Y)) = \int_{U_X} \psi(Y) d\sigma^+(E(Y)).$$

Доказательство. Пусть F — гладкая поверхность ограниченной внешней кривизны. Приняв касательную плоскость в точке X за плоскость xu , достаточно малую окрестность этой точки поверхности можем задать уравнениями

$$z = \varphi(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

где $\varphi(x, y)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция по обоим переменным в указанной области.

Так как множество изолированных отрезков на поверхности не более чем счетно, то, не ограничивая общности, можно считать, что среди них нет параллельных плоскости xu .

Для каждого отрезка g множества G_ε (лемма 4 § 3)

построим кусочно-аналитические поверхности $\tilde{F}_g^+$ и $\tilde{F}_g^-$ с достаточно малым ε , которым они определяются.

Разобьем прямоугольник Δ $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ прямыми, параллельными координатным осям, на малые прямоугольники δ так, чтобы абсолютная кривизна поверхности на множестве точек, соответствующих сторонам и вершинам прямоугольников δ , была равна нулю. Пусть F_δ — кусок поверхности F , который проектируется на прямоугольник δ . Образует выпуклую оболочку F_δ . Пусть F'_δ — та ее часть, которая обращена в сторону $z > 0$, а F''_δ — в сторону $z < 0$.

Поверхности F'_δ и F''_δ , у которых соответствующие прямоугольники δ_1 и δ_2 имеют общую сторону, тоже имеют общий отрезок границы — некоторую выпуклую кривую, которая проектируется на эту общую сторону прямоугольников, так что поверхности F'_δ , взятые вместе, образуют некоторую поверхность F' , однозначно проектируются на прямоугольник Δ . Аналогичным свойством обладают поверхности F''_δ .

Пусть H — любое множество точек на поверхности F . Тогда положительная кривизна поверхности F на множестве H не меньше суммы положительных кривизн поверхностей F'_δ и F''_δ на множествах, проектирующихся прямыми, параллельными оси z в H . Это немедленно следует из того, что каждой точке одностороннего расположения на F'_δ (или F''_δ), не содержащей прямолинейного отрезка, в указанном проектировании соответствует на F точка одностороннего расположения.

Приближим каждую поверхность F'_δ алгебраической выпуклой поверхностью $\tilde{F}'_\delta$, удовлетворяя при этом следующим условиям:

1) полная кривизна $\tilde{F}'_\delta$ должна мало отличаться от полной кривизны F'_δ ;

2) если P — точка края какой-нибудь из поверхностей $\tilde{F}'_\delta$, то всегда найдется по крайней мере на одной из смежных поверхностей $\tilde{F}'_\delta$ внутренняя точка, расположенная над P ;

3) никакие две поверхности $\tilde{F}'_\delta$ не касаются, следовательно, либо не имеют общих точек, либо пересекаются по алгебраическим кривым.

Очевидно, удовлетворяющее этим условиям приближение поверхностей F'_δ алгебраическими поверхностями $\tilde{F}'_\delta$ нетрудно осуществить.

Поверхности $\tilde{F}'_\delta$ разбивают область пространства $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Пусть E' — та из областей этого разбиения, которая содержит точки со сколь угодно большими z . Часть границы E' , составленную из кусков алгебраических поверхностей $\tilde{F}'_\delta$, обозначим F' . Она представляет собой кусочно-алгебраическую поверхность, однозначно проектирующуюся на прямоугольник Δ .

Аналогично строится кусочно-алгебраическая поверхность F'' из алгебраических поверхностей $\tilde{F}''_\delta$, приближающих поверхности F''_δ .

Сместим поверхность F'' на малое расстояние h вверх, а поверхность F' на такое же расстояние вниз. При этом, так как h мало, край каждой поверхности $\tilde{F}^+_{\delta g}$ (§ 3) будет над поверхностью F'' . Заменяем ту часть поверхности F'' , которая вырезается поверхностями $\tilde{F}^+_{\delta g}$, соответствующими кусками этих поверхностей. Полученную поверхность обозначим Φ . Аналогично с помощью поверхностей F' и $\tilde{F}^-_{\delta g}$ построим поверхность $\bar{\Phi}$.

Очевидно, малостью прямоугольников можно распо-

рядиться так, чтобы при заданном смещении h поверхность $\tilde{\Phi}$ была расположена над $\bar{\Phi}$.

Приближим линии пересечения поверхности F с плоскостями $x=a$ и $x=b$ алгебраическими кривыми $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ и построим для этих кривых и поверхностей $\tilde{\Phi}, \bar{\Phi}$ натянутую поверхность $\tilde{\Phi}$ (§ 1). Утверждается, что при соответствующем выборе конструктивных параметров, определяющих строение поверхности $\tilde{\Phi}$, она будет обладать следующими свойствами:

1) поверхность $\tilde{\Phi}$ близка к F ;

2) касательные плоскости $\tilde{\Phi}$ образуют с касательными плоскостями F в соответствующих точках малые углы.

Первое утверждение очевидно, оно обеспечено малостью h . Именно, расстояние между соответствующими точками F и $\tilde{\Phi}$ (т. е. точками, расположенными на одной вертикали) не превосходит h .

Докажем второе утверждение. Допустим, оно неверно. Тогда на каждой поверхности $\tilde{\Phi}$ можно указать точку $\tilde{Q}$ такую, что касательная плоскость в этой точке образует с касательной плоскостью поверхности F в соответствующей точке Q угол больше $\varepsilon > 0$, причем ε одно и то же для всех $\tilde{\Phi}$.

Можно считать, что точка $\tilde{Q}$ не принадлежит ни Φ , ни $\bar{\Phi}$, так как касательные плоскости этих поверхностей близки к касательным плоскостям F по построению. Таким образом, точка $\tilde{Q}$ должна принадлежать прямолинейному отрезку $\tilde{g}$, который на концах касается поверхностей $\Phi, \bar{\Phi}$, либо опирается на кривые $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$.

По той же причине расстояния точки $\tilde{Q}$ от концов отрезка $\tilde{g}$, которому она принадлежит, ограничены снизу.

Когда поверхность $\tilde{\Phi}$ неограниченно приближается к F , отрезок $\tilde{g}$, можно считать, сходится к некоторому отрезку g_0 (части отрезка) поверхности F , а точка $\tilde{Q}$ к его внутренней точке Q_0 . Относительно отрезка g_0 могут быть только три предположения: 1) $\vartheta_{g_0} \geq \varepsilon$, $|\mu_{g_0} - 1| \geq \varepsilon$; 2) $\vartheta_{g_0} < \varepsilon$; 3) $|\mu_{g_0} - 1| < \varepsilon$. Мы покажем, однако, что конструктивными параметрами поверхностей $\tilde{\Phi}$, сходящихся к F , можно распорядиться так, что ни одно из указанных условий для предельного отрезка g_0 не будет выполняться.

По лемме 4 § 3 легко добиться того, чтобы для g_0 не выполнялось первое условие.

Допустим, g_0 удовлетворяет второму условию ($\vartheta_{g_0} < \varepsilon$). Тогда изменение производной $\partial\varphi/\partial u$ вдоль отрезка g_0 не превосходит ε , т. е. с точностью до ε $\partial\varphi/\partial u$ не изменяется. В точке $\tilde{Q}$ $\partial\varphi/\partial u$ заключена между ее значениями на концах отрезка $\tilde{g}$. А последние близки к значениям $\partial\varphi/\partial u$ в соответствующих точках отрезка g_0 .

Отсюда следует, что при достаточной близости $\tilde{\Phi}$ к F производные $d\varphi/du$ и $\partial\varphi/\partial u$ в точках Q и $\tilde{Q}$ соответственно будут отличаться на величину порядка ε , которую ввиду произвола ε можно считать меньшей ε . Итак, достаточно взять малым ε , и для отрезка g_0 не будет выполняться второе условие.

Допустим, наконец, что для отрезка g_0 выполняется третье условие $|\mu_{g_0} - 1| < \varepsilon$. Покажем, что и это исключается, если достаточно мало ε . Производная $\partial\varphi/\partial u$ вдоль отрезка $\tilde{g}_0$ при $|\mu_{g_0} - 1| < \varepsilon$ и производная $\partial\varphi/\partial u$ вдоль отрезка $\tilde{g}$ изменяются одинаково с точностью до величины порядка ε . И так как указанные производные на концах отрезков близки, то они близки и в точках, делящих отрезки в одинаковых отношениях. Таким образом, если ε мало в сравнении с ε , для отрезка g_0 не может выполняться третье условие. Мы пришли к противоречию. Итак, среди поверхностей $\tilde{\Phi}$ суще-

ствуют такие, которые сколь угодно близки вместе с касательными плоскостями к поверхности F .

Построим теперь для каждой поверхности $\tilde{\Phi}$ аналитическую поверхность $\tilde{\Phi}^*$ по лемме 2 § 2. Утверждается, что последовательность аналитических поверхностей, существование которой утверждается теоремой, может быть построена из поверхностей $\tilde{\Phi}^*$.

То, что из совокупности поверхностей $\tilde{\Phi}^*$ можно выделить последовательность $\tilde{\Phi}_n^*$, сходящуюся к F вместе со сферическими изображениями, очевидно. Покажем, что при этом может быть обеспечена также слабая сходимости положительных кривизн.

Каково бы ни было $\varepsilon^+ > 0$, при достаточной близости поверхности $\tilde{\Phi}^*$ к F

$$\sigma^+(\tilde{\Phi}^*) > \sigma^+(F) - \varepsilon^+.$$

Докажем это.

Возьмем на F конечное число замкнутых, попарно не пересекающихся множеств H_k , сумма площадей сферических изображений которых мало отличается от абсолютной кривизны F .

Определим на F множества W_n точек одностороннего расположения следующим условием. Точку X отнесем W_n , если она имеет окрестность $U(X)$ такую, что:

1) вся $U(X)$ расположена по одну сторону касательной плоскости в точке X ;

2) граница окрестности $U(X)$ находится на расстоянии не меньшем $1/n$ от касательной плоскости;

3) диаметр $U(X)$ не больше расстояния между множеством ΣH_k и границей поверхности F (соответствующей границе прямоугольника Δ).

Очевидно, W_k — замкнутые множества. При достаточно большом n сумма площадей сферических изображений множеств $W_k \cap H_k$ мало отличается от положительной кривизны F , так как $\sum_1^\infty W_n$ содержит все эллиптические точки множества $\sum_k H_k$.

Пусть поверхность $\tilde{\Phi}^*$ так близка к F , что располагается в ϵ^* — окрестности последней. Если ϵ^* мало в сравнении с $1/n$, то для каждой точки $X \in W_n \cap H_k$ найдется на $\tilde{\Phi}^*$ точка $\tilde{X}^*$ одностороннего расположения такая, что:

- 1) расстояние между точками X и $\tilde{X}^*$ мало вместе с ϵ^* ;
- 2) касательные плоскости поверхностей F и $\tilde{\Phi}^*$ в точках X и $\tilde{X}^*$ параллельны.

Обозначим множество таких точек $\tilde{X}^*$, соответствующих множеству $W_n \cap H_k$, через M_k . Множества M_k при достаточно малом ϵ^* не пересекаются. Сумма площадей их сферических изображений не меньше суммы площадей сферических изображений множеств $W_n \cap H_k$, которая мало отличается от положительной кривизны поверхности по построению. Отсюда мы и заключаем, что каково бы ни было $\epsilon^+ > 0$, при достаточной близости $\tilde{\Phi}^*$ к F

$$\sigma^+(\tilde{\Phi}^*) > \sigma^+(F) - \epsilon^+.$$

Распределение положительной кривизны на поверхности $\tilde{\Phi}^*$ почти не отличается от распределения ее на нитяной поверхности $\tilde{\Phi}$, из которой $\tilde{\Phi}^*$ получается сглаживанием. Положительная кривизна нитяной поверхности $\tilde{\Phi}$ сосредоточена в областях, по которым она прилегает к поверхностям Φ и $\overline{\Phi}$.

Положим,

$$\sigma^+(\tilde{\Phi}_\delta^*) - \sigma^+(F_\delta) = \eta_\delta.$$

Тогда по указанной причине сумма тех η_δ , которые больше нуля, можно считать, меньше ϵ^+ . А тогда, принимая во внимание предыдущее неравенство, заключаем, что сумма абсолютных величин η_δ не превосходит $2\epsilon^+$. Итак,

$$\sum_\delta |\sigma^+(\tilde{\Phi}_\delta^*) - \sigma^+(F_\delta)| < 2\epsilon^+.$$

Будем обозначать положительные кривизны поверхностей F и $\tilde{\Phi}^*$ на множествах, проектирующихся в множество E прямоугольника Δ через $\sigma_F^+(E)$ и $\sigma_{\tilde{\Phi}^*}^+(E)$ соответственно.

Пусть f — любая непрерывная функция, заданная в прямоугольнике Δ . Рассмотрим разность

$$R = \int_{\Delta} f d\sigma_F^+ - \int_{\Delta} f d\sigma_{\tilde{\Phi}^*}^+.$$

Очевидно, R можно представить в виде

$$R = \sum_{\delta} f'_{\delta} \sigma_F^+(\delta) - \sum_{\delta} f''_{\delta} \sigma_{\tilde{\Phi}^*}^+(\delta),$$

где f'_{δ} и f''_{δ} — средние значения функции f в прямоугольнике δ . А теперь нетрудно оценить ее. Имеем:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\delta} f'_{\delta} (\sigma_F^+(\delta) - \sigma_{\tilde{\Phi}^*}^+(\delta)) + \\ &+ \sum_{\delta} \sigma_F^+(\delta) (f'_{\delta} - f''_{\delta}). \end{aligned}$$

Первая сумма мала ввиду того, что ϵ^+ может быть взято произвольно малым в неравенстве для положительных кривизн, которое только что получено. Вторая сумма мала по причине равномерной непрерывности функции f .

Отсюда мы делаем вывод, что в последовательности поверхностей $\tilde{\Phi}_n^*$ может быть обеспечена также слабая сходимость положительных кривизн к положительной кривизне F .

Теорема доказана полностью.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

О ВНУТРЕННЕЙ КРИВИЗНЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ

§ 1. Поверхности ограниченной внешней кривизны как многообразия ограниченной внутренней кривизны

Теория двумерных многообразий ограниченной внутренней кривизны построена А. Д. Александровым [3]. Напомним основные определения и теоремы этой теории.

Многообразие R ограниченной внутренней кривизны определяется двумя аксиомами:

1. R есть многообразие с внутренней метрикой.

2. Каждая точка R имеет окрестность такую, что для любой конечной совокупности попарно не перекрывающихся треугольников в ней сумма абсолютных величин их избытков равномерно ограничена.

Поясним эти аксиомы. Пусть R — метрическое многообразие с метрикой ρ , т. е. метрическое пространство, являющееся многообразием. Тогда для каждой кривой $X(t)$ $a \leq t \leq b$ в многообразии R может быть определено понятие длины кривой обычным способом:

$$l = \sup \sum \rho(X(t_k), X(t_{k-1})) \quad a \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n \leq b.$$

Относительно метрического многообразия R говорят, что его метрика внутренняя, если расстояние $\rho(X, Y)$ между любыми двумя точками X и Y в R равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих эти точки.

Кривая, соединяющая точки X и Y в R , называется кратчайшей, если ее длина не больше, чем длина любой другой кривой, соединяющей эти точки. Геодезическая определяется как кривая, кратчайшая на каждом достаточно малом отрезке.

Кратчайшие в многообразии ограниченной кривизны обладают следующими свойствами:

1. Для каждой точки A в R и ее окрестности U существует такая окрестность V этой же точки, что любая кратчайшая в R , соединяющая любые две точки X и Y из V , проходит в U .

2. Кратчайшая гомеоморфна отрезку и поэтому вблизи каждой ее внутренней точки можно различать две стороны.

3. Длина кратчайшей равна расстоянию между ее концевыми точками в метрике ρ .

Треугольником ABC в многообразии R называется фигура, составленная из трех кратчайших γ_{AB} , γ_{BC} , γ_{AC} , попарно соединяющих точки A , B , C . Точки A , B , C называются вершинами треугольника, а кратчайшие — сторонами.

Относительно двух треугольников T' и T'' говорят, что они не перекрываются, если существуют не пересекающиеся гомеоморфные кругу области G' и G'' , замыкания которых содержат треугольники T' и T'' соответственно.

Пусть γ_1 и γ_2 — две кривые в R , исходящие из точки O . Пусть X и Y — переменные точки на кривых γ_1 и γ_2 соответственно. Построим на плоскости треугольник со сторонами, равными $\rho(O, X)$, $\rho(O, Y)$, $\rho(X, Y)$. Пусть $\vartheta(X, Y)$ — угол этого треугольника, противолежащий стороне $\rho(X, Y)$. Верхним углом между кривыми γ_1 и γ_2 в точке O называется верхний предел углов $\vartheta(X, Y)$ при $X, Y \rightarrow O$. Просто углом между кривыми γ_1 и γ_2 в точке O называется предел $\vartheta(X, Y)$ при $X, Y \rightarrow O$. Угол между кривыми в их общей точке может не существовать, в то время как верхний угол всегда существует.

Верхним углом треугольника ABC при вершине A называется верхний угол между сторонами треугольника γ_{AB} и γ_{AC} в точке A . Избытком треугольника называется разность между суммой его верхних углов и π .

В многообразии ограниченной внутренней кривизны любые две кратчайшие, исходящие из одной точки, образуют определенный угол в смысле данного выше определения. Этот угол, очевидно, совпадает с верхним углом.

Пусть G — открытое множество в многообразии R ограниченной внутренней кривизны. Положительной (отрицательной) кривизной R на множестве G называется точная верхняя грань (точная нижняя грань с обратным знаком) сумм избытков попарно не перекрывающихся треугольников в G и обозначается $\omega^+(G)$ (соответственно $\omega^-(G)$).

Положительная и отрицательная кривизны многообразия R на любом множестве M определяются равенствами

$$\omega^+(M) = \inf_{M \subset G} \omega^+(G), \quad \omega^-(M) = \inf_{M \subset G} \omega^-(G).$$

Полной кривизной R на M называется разность между положительной и отрицательной кривизной R на этом множестве. Абсолютной кривизной R на M называется сумма положительной и отрицательной кривизн на M .

Положительная, отрицательная, полная и абсолютная кривизны на компактных множествах конечны и вполне аддитивны на кольце борелевских множеств.

Метрическое многообразие R называется римановым, если оно в окрестности каждой точки допускает такую параметризацию u, v (т. е. топологическое отображение на плоскость с декартовыми координатами u, v), что ее метрика задается в окрестности этой точки положительно определенной квадратичной дифференциальной формой

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

с обычным способом вычисления расстояний между точками (как точной нижней грани длин, соединяющих точки кривых).

Если риманово многообразие допускает параметризацию (u, v) такую, что коэффициенты E, F, G формы ds^2 дважды непрерывно дифференцируемы, то оно является многообразием ограниченной кривизны.

Положительная и отрицательная кривизны риманового многообразия на любом множестве M равны:

$$\omega^+ = \int_{k > 0} k d\sigma, \quad \omega^- = - \int_{k < 0} k d\sigma,$$

где k — гауссова кривизна, $d\sigma$ — элемент площади многообразия, а интегрирование распространяется на подмножество множества M , где $k > 0$ и $k < 0$ соответственно.

Пусть на многообразии R задана последовательность римановых метрик ρ_n , сходящихся к некоторой метрике ρ в том смысле, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n для любых двух точек X и Y в R $|\rho(X, Y) - \rho_n(X, Y)| < \varepsilon$. Тогда, если абсолютные кривизны римановых многообразий R_{ρ_n} (многообразие R с метрикой ρ_n) равномерно ограничены, то многообразие R_ρ является многообразием ограниченной кривизны. Более того, если положительные (отрицательные) кривизны многообразий R_{ρ_n} не превосходят ω_0^+ (ω_0^-), то положительная (отрицательная) кривизна R_ρ не превосходит также ω_0^+ (соответственно ω_0^-). Из последовательности многообразий R_{ρ_n} можно выделить подпоследовательность таких, полные кривизны которых слабо сходятся к полной кривизне R_ρ .

Полная кривизна замкнутого многообразия с эйлеровой характеристикой χ равна $\pi\chi$.

Пусть Φ — гладкая поверхность, однозначно проектирующаяся на плоскость xy , заданная уравнением

$$z = \varphi(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

где φ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция в указанном прямоугольнике. Пусть Φ_n — последовательность гладких поверхностей, также однозначно проектирующихся на прямоугольник $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, сходящаяся с касательными плоскостями к Φ . Утверждается, что внутренние метрики поверхностей Φ_n сходятся к внутренней метрике Φ , если соответствие точек между поверхностями устанавливается проектированием прямыми, параллельными оси z . Покажем это.

Пусть поверхность Φ_n задается уравнением

$$z = \varphi_n(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Возьмем две произвольные точки A и B на поверхности Φ и соединим их кривой γ на поверхности. Длина этой кривой

$$l_\gamma = \int_\gamma \sqrt{(1 + \varphi_x^2) dx^2 + 2\varphi_x\varphi_y dx dy + (1 + \varphi_y^2) dy^2}.$$

По непрерывности производных φ_x и φ_y абсолютные величины их меньше некоторой постоянной c . Поэтому

$$l_\gamma < \sqrt{1 + 2c^2} l_\gamma^*,$$

где l_γ^* — длина кривой γ — проекции кривой γ на плоскости xy . Если взять в качестве кривой γ кривую, лежащую в плоскости, перпендикулярной плоскости xy , то получим

$$l_\gamma < \sqrt{1 + 2c^2} d,$$

где d — диагональ прямоугольника, на который проектируется поверхность. Отсюда следует, что каковы бы ни были точки A и B , расстояние между ними на поверхности не превосходит $\sqrt{1 + 2c^2} d$.

Так как поверхности Φ_n сходятся с касательными плоскостями к Φ , то функции $\varphi_n(x, y)$ сходятся равномерно с первыми производными к функции $\varphi(x, y)$. Поэтому при достаточно больших n

$$|\partial\varphi_n/\partial x| < c \text{ и } |\partial\varphi_n/\partial y| < c.$$

Отсюда, как и в случае поверхности Φ , заключаем, что расстояние между любыми двумя точками на поверхности Φ_n меньше $\sqrt{1 + 2c^2} d$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Надо показать, что при достаточно большом n расстояние между любыми двумя точками A и B на поверхности Φ отличается от расстояния между соответствующими точками A_n и B_n на поверхности Φ_n меньше, чем на ε .

По определению существует кривая γ , соединяющая точки A и B на Φ , такая, что

$$|l_\gamma - \rho(A, B)| < \varepsilon'.$$

При достаточно больших n

$$|\partial\varphi/\partial x - \partial\varphi_n/\partial x| < \varepsilon'', \quad |\partial\varphi/\partial y - \partial\varphi_n/\partial y| < \varepsilon''.$$

Используя легко проверяемое неравенство

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq \sqrt{|\alpha - \beta|},$$

заключаем, что

$$|l_\gamma - l_{\gamma_n}| < 2\sqrt{c\varepsilon''}l_\gamma,$$

где l_{γ_n} — длина кривой γ_n на поверхности Φ_n , соответствующей кривой γ на Φ , а l_γ^- — длина проекции кривой γ на плоскость xy . Так как $l_\gamma^- \leq l_\gamma$, то

$$|l_\gamma - l_{\gamma_n}| < 2\sqrt{c\varepsilon''}l_\gamma.$$

Отсюда, так как l_γ отличается от $\rho(A, B)$ не более, чем на ε' , а $l_{\gamma_n} \geq \rho_n(A_n, B_n)$, ввиду произвола ε' и ε'' заключаем:

$$\rho_n(A_n, B_n) - \rho(A, B) < \varepsilon.$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$\rho(A, B) - \rho_n(A_n, B_n) < \varepsilon.$$

Для этого надо взять кривую γ_n на поверхности Φ_n , соединяющую точки A_n и B_n , такую, чтобы

$$|l_{\gamma_n} - \rho(A_n, B_n)| < \varepsilon',$$

а затем воспользоваться аналогичными рассуждениями. Утверждение доказано.

Теорема 1. *Поверхности ограниченной внешней кривизны суть многообразия ограниченной внутренней кривизны.*

Доказательство. Пусть Φ — поверхность ограниченной внешней кривизны и O — произвольная точка на этой поверхности. Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты, приняв точку O за начало координат, а касательную плоскость поверхности в этой точке — за плоскость xy . Тогда некоторая окрестность G точки O на поверхности допускает задание уравнением

$$z = \varphi(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Согласно теореме о приближении (§ 4, гл. III) существует последовательность аналитических поверхностей Φ_n :

$$z = \varphi_n(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

с равномерно ограниченными положительными кривизнами, сходящиеся к Φ вместе с касательными плоско-

стями в области G . По доказанному метрики Φ_n сходятся к метрике Φ в G .

Возьмем на плоскости xy квадрат κ с центром в начале координат и стороной δ . Пусть A_n, B_n, C_n и D_n — точки на поверхности Φ_n , проектирующиеся в вершины квадрата κ . Утверждается, что при малом δ для всех достаточно больших n четыре кратчайшие, соединяющие точки A_n, B_n, C_n и D_n на поверхности Φ_n , подобно тому как стороны квадрата κ соединяют его вершины, ограничивают гомеоморфную кругу область G_n^* , проекция которой на плоскость xy покрывает круг

$$x^2 + y^2 \leq \delta^*,$$

где δ^* — малое положительное число. Докажем это утверждение.

Пусть γ_n одна из четырех кратчайших, например, соединяющая точки A_n и B_n . Покажем, что ее проекция на плоскость xy при малом δ и большом n проходит в λ -окрестности соответствующей стороны квадрата, причем λ мало в сравнении с δ . Если это неверно, то существует $\varepsilon > 0$, последовательность чисел $\delta_k \rightarrow 0$ и поверхностей Φ_{n_k} такие, что проекция кратчайшей γ_{n_k} на плоскость xy выходит из $\delta\varepsilon$ -окрестности соответствующей стороны квадрата. Но тогда длина кривой γ_{n_k} -проекции γ_{n_k} на плоскость xy не меньше $(1 + \varepsilon)\delta$. Тем более

$$l(\gamma_{n_k}) > (1 + \varepsilon)\delta.$$

С другой стороны, длина кривой, соединяющей точки A_{n_k} и B_{n_k} на Φ_{n_k} и проектирующейся на сторону квадрата, как показано выше, не превосходит

$$\sqrt{1 + 2c^2} \delta,$$

где c — максимум модулей производных $\partial\Phi_{n_k}/\partial x$ и $\partial\Phi_{n_k}/\partial y$ в квадрате κ . А так как в точке O $\partial\Phi/\partial x = \partial\Phi/\partial y = 0$, то при малом δ и достаточно большом n_k

$$\sqrt{1 + 2c^2} \delta < (1 + \varepsilon)\delta.$$

Мы пришли к противоречию. Итак, при малом δ для достаточно больших n проекция кратчайшей γ_n на пло-

скость xu проходит в λ - окрестности соответствующей стороны квадрата x , причем λ мало в сравнении с δ .

Пусть δ так мало, что λ можно брать равным $\delta/4$. Покажем, что кратчайшие, соединяющие точки A_n, B_n, C_n, D_n , образуют простую, а следовательно, ограничивающую гомеоморфную кругу область, кривую. Для этого заметим прежде всего, что кратчайшие $\gamma_{A_n B_n}$ и $\gamma_{C_n D_n}$, равно как и кратчайшие $\gamma_{A_n D_n}$ и $\gamma_{B_n C_n}$, не имеют общих точек. Это очевидно, так как в противном случае пересекались бы их проекции на плоскость xu , что невозможно ($\lambda = \frac{\delta}{4}$).

Легко видеть далее, что кратчайшие $\gamma_{A_n D_n}$ и $\gamma_{A_n B_n}$ имеют только одну общую точку — A_n . Действительно, в противном случае по свойству неналегания кратчайших на регулярной поверхности одна из кратчайших должна содержать другую. Но это невозможно, так как проекция каждой кратчайшей должна быть в $\delta/4$ — окрестности соответствующей стороны квадрата.

Аналогичные заключения можно сделать и о других парах кратчайших: $\gamma_{B_n A_n}$ и $\gamma_{B_n C_n}$, $\gamma_{C_n B_n}$ и $\gamma_{C_n D_n}$, $\gamma_{D_n B_n}$ и $\gamma_{D_n A_n}$.

Итак, четыре кратчайшие $\gamma_{A_n B_n}, \dots, \gamma_{D_n A_n}$ образуют замкнутую кривую, ограничивающую гомеоморфную кругу область G_n^* на поверхности Φ_n . Проекция каждой из областей G_n^* на плоскость xu покрывает круг

$$x^2 + y^2 \leq (\delta/4)^2,$$

так как проекция каждой из кратчайших, ограничивающих область G_n^* , проходит на расстоянии не меньшем $\delta/4$ от точки O .

По теореме о приближении положительные кривизны поверхностей Φ_n ограничены некоторой постоянной C^+ . Тем более этой постоянной ограничены положительные кривизны поверхностей Φ_n в областях G_n^* .

По теореме Гаусса—Бонне абсолютное значение полной кривизны каждого четырехугольника G_n^* не превос-

ходит 4π . Отсюда следует, что отрицательные кривизны областей G_n^* ограничены постоянной $4\pi + C^+$. Таким образом, абсолютные кривизны областей G_n на поверхностях Φ_n ограничены числом $4\pi + 2C^+$. Тем более эта оценка имеет место для частей $\tilde{\Phi}_n$ поверхностей Φ_n , которые проектируются на круг

$$x^2 + y^2 < \delta^2/16.$$

Так как абсолютные кривизны поверхностей $\tilde{\Phi}_n$ равномерно ограничены, то предельная поверхность $\tilde{\Phi}$ — область на поверхности Φ , проектирующаяся в круг $x^2 + y^2 < \delta^2/16$, есть многообразие ограниченной кривизны. Точка O на поверхности Φ была взята произвольно, поэтому вся поверхность Φ является многообразием ограниченной кривизны.

Теорема доказана.

§ 2. Вспомогательные предложения

В этом параграфе мы докажем некоторые предложения, которые существенным образом будут использованы при установлении связи между внутренней и внешней кривизной поверхности в следующем параграфе настоящей главы.

Лемма 1. Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны, G — любое открытое множество на ней с границей γ , принадлежащей поверхности (поверхность предполагается открытой), и H — любое замкнутое множество, содержащееся в G . Пусть сферические изображения множества G и его границы γ не пересекаются.

Тогда существует бесконечная последовательность открытых множеств $G_1, G_2, \dots, G_n$, содержащих H и содержащихся в G , удовлетворяющих условиям:

1) каждое множество G_k состоит из конечного числа областей (вообще говоря, многосвязных), ограниченных простыми кривыми;

2) сферическое изображение $\bar{\gamma}_k$ границы γ_k любого множества G_k имеет площадь, равную нулю;

3) полные прообразы множества $\bar{\gamma}_i$ и $\bar{\gamma}_j$ в G не пересекаются.

Доказательство. Не ограничивая возможностей использования леммы, можно считать, что поверхность F однозначно проектируется на плоскость xy . Разобьем плоскость xy на малые квадраты δ и обозначим F^δ замкнутый кусок поверхности, который проектируется в квадрат δ . Пусть M^δ — замкнутое множество, которое состоит из кусков F^δ , пересекающихся с границей γ области G .

Если квадраты δ достаточно малы, сферические изображения H и M^δ не пересекаются.

Открытое множество $G - M^\delta$ состоит из конечного числа областей (вообще говоря, многосвязных), ограниченных простыми кривыми. Приближим контуры каждой из областей простыми кривыми с нулевой площадью сферического изображения. Сумму полученных областей обозначим G_1 . Очевидно, операцию приближения границ можно проделать так, что G_1 будет содержать H и сферические изображения H и $G - G_1$ не будут пересекаться.

Построим G_2 . Пусть M_1 — множество тех точек G , сферические изображения которых принадлежат сферическому изображению $G - G_1$. По построению $M_1 \cap H = 0$. Множество G_2 строится точно так же, как G_1 , только роль G теперь будет играть $G_1 - M_1$. Допустим, множество G_2 построено. Пусть M_2 — множество тех точек G , сферические изображения которых принадлежат сферическому изображению $G - G_2$. $M_2 \cap H = 0$. Далее строится тем же способом множество G_3 и т. д.

Очевидно, построенная таким образом последовательность множеств G_k обладает указанными в лемме свойствами 1, 2, 3.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны и G — открытое множество на ней, удовлетворяющее условиям леммы 1. Пусть F_n — последовательность регулярных поверхностей с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами, сходящихся к F вместе со сферическими изображениями.

Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ среди открытых множеств G_k , существование которых устанавливается леммой 1, найдется такое, что для бесконечного множества значений n

$$|\sigma(G_k) - \sigma(G_k^n)| < \varepsilon,$$

где G_k^n — множество на поверхности F_n , соответствующее G_k .

Доказательство. Чтобы упростить запись, будем предполагать, что каждое G_k состоит из одной гомеоморфной кругу области, ограниченной кривой γ_k . Тогда для полных кривизн областей G_k и G_k^n поверхностей F и F_n имеем представления

$$\sigma(G_k) = \int_{\omega} q_{\gamma_k}^-(Y) dY,$$

$$\sigma(G_k^n) = \int_{\omega} q_{\gamma_k^n}^-(Y) dY,$$

где q обозначена степень произвольной точки единичной сферы относительно соответствующей кривой, а dY — элемент площади сферы.

Обозначим $\delta \gamma_k$ и $\delta \gamma_k^n$ δ -окрестности кривых γ_k и γ_k^n . Тогда в силу равномерной сходимости сферических изображений, из которой вытекает равномерная сходимость γ_k^n к γ_k при $n \rightarrow \infty$, следует:

$$\int_{\omega - \delta \gamma_k^n} q_{\gamma_k^n}^-(Y) dY \rightarrow \int_{\omega - \delta \gamma_k} q_{\gamma_k}^-(Y) dY.$$

Пусть $\tilde{\gamma}_k$ — полный прообраз кривой γ_k на поверхности F . Абсолютная кривизна $\tilde{\gamma}_k$ равна нулю, как так γ_k имеет своим сферическим изображением кривую γ_k , площадь которой равна нулю. Пусть U — открытое множество, содержащее $\tilde{\gamma}_k$ и такое, чтобы абсолютная кривизна его была сколь угодно мала. При достаточно малом δ полный прообраз $\delta \tilde{\gamma}_k$ множества $\delta \gamma_k$ содержится внутри U , а следовательно, его абсолютная кривизна сколь угодно мала.

Величина

$$\left| \int_{\delta \tilde{\gamma}_k} q_{\gamma_k}^-(Y) dY \right|$$

не превосходит абсолютной кривизны $\delta \tilde{\gamma}_k$, так как для почти всех Y

$$q_{\gamma_k}^-(Y) = n^+(Y) - n^-(Y),$$

где $n^+(Y)$ — число эллиптических, а $n^-(Y)$ — число гиперболических точек в $\tilde{\gamma}_k$, имеющих своим сферическим изображением Y . Следовательно,

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}_k} q_{\gamma_k}^-(Y) dY \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Если при этом найдутся сколь угодно большие n , для которых

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}_k^n} q_{\gamma_k}^-(Y) dY \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то G_k и есть то множество, существование которого утверждается леммой.

Допустим, утверждение леммы неверно. Тогда, каково бы ни было k и $\delta > 0$ для всех достаточно больших n

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}_k^n} q_{\gamma_k}^-(Y) dY \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть m — любое натуральное число. Так как множества $\tilde{\gamma}_k$ попарно не пересекаются, то при достаточно малом δ множества $\tilde{\gamma}_k^n$ $k=1, 2, \dots, m$ также попарно не пересекаются. При достаточно большом n абсолютная кривизна каждого множества $\tilde{\gamma}_k^n$ ($k \leq m$) больше $\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому абсолютная кривизна F_n для достаточно больших n больше $m \frac{\varepsilon}{2}$. Но это невозможно, так как m произвольно, а абсолютные кривизны поверхностей F_n равномерно ограничены по условию. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны и G — открытое множество на ней, удовлетворяющее условиям леммы 1. Пусть F_n — последовательность регулярных поверхностей с равномерно ограниченными положительными и отрицательными кри-

визнами, сходящихся к F вместе со сферическими изображениями.

Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, среди областей G_k , построенных в лемме 1, есть такая, что найдутся сколь угодно большие n , для которых

$$|\omega(G_k) - \omega(G_k^n)| < \varepsilon.$$

Доказательство. По гомеоморфизму, определяющему сходимость F_n к F , кривизны поверхностей F_n можно рассматривать как функции множеств на поверхности F . Именно, если E произвольное множество на F и E_n соответствующее ему множество на F_n , то положим

$$\omega_n(E) = \omega(E_n),$$

$$\omega_n^+(E) = \omega^+(E_n),$$

$$\omega_n^-(E) = \omega^-(E_n).$$

Допустим, у полного прообраза $\tilde{\gamma}_k$ кривой $\bar{\gamma}_k$ есть δ — окрестность $\delta\tilde{\gamma}_k$ такая, что найдутся сколь угодно большие n , для которых

$$\omega^+(\delta\tilde{\gamma}_k) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega^-(\delta\tilde{\gamma}_k) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\omega_n^+(\delta\tilde{\gamma}_k) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega_n^-(\delta\tilde{\gamma}_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(*)

Покажем, что тогда найдутся сколь угодно большие n , для которых

$$|\omega(G^k) - \omega_n(G^k)| < \varepsilon.$$

Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что полные внутренние кривизны F_n слабо сходятся к полной кривизне F . Это значит, что какова бы ни была непрерывная функция f , заданная на поверхности F ,

$$\int_F f d\omega_n \rightarrow \int_F f d\omega.$$

Возьмем в качестве f функцию, определяемую условиями;

$$f(X) = 1, \text{ если } X \subset G_k - \delta \tilde{\gamma}_k,$$

$$f(X) = 0, \text{ если } X \subset F - G_k - \delta \tilde{\gamma}_k.$$

$$f(X) = \frac{\mu(X)}{\lambda(X) + \mu(X)}, \text{ если } X \subset \delta \tilde{\gamma}_k.$$

Функция f , очевидно, непрерывна.

При достаточно больших n , удовлетворяющих неравенствам (*),

$$\left| \int_F f d\omega_n - \omega_n(G_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| \int_F f d\omega - \omega(G_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что для таких достаточно больших n

$$|\omega(G_k) - \omega_n(G_k)| < \varepsilon.$$

Таким образом, если предположение о существовании δ -окрестности множества $\tilde{\gamma}_k$ — имеет место, то область G_k обладает нужным свойством.

Допустим, указанное предположение не имеет места ни для какой кривой $\tilde{\gamma}_k$. Тогда для любого $\delta > 0$ и любого k при достаточно большом n по крайней мере одно из чисел $\omega^+(\delta \tilde{\gamma}_k)$, $\omega^-(\delta \tilde{\gamma}_k)$, $\omega_n^+(\delta \tilde{\gamma}_k)$ или $\omega_n^-(\delta \tilde{\gamma}_k)$ будет не меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть m — любое натуральное число. Возьмем δ настолько малым, чтобы множества $\delta \tilde{\gamma}_k$ ($k \leq m$) не пересекались. Положим,

$$M = \delta \tilde{\gamma}_1 + \delta \tilde{\gamma}_2 + \dots + \delta \tilde{\gamma}_m.$$

Тогда найдутся такие n , что по крайней мере одно из чисел

$$\omega^+(M), \quad \omega^-(M), \quad \omega_n^+(M), \quad \omega_n^-(M)$$

будет не меньше $m \frac{\varepsilon}{8}$. Но это невозможно, так как m произвольно, а функции множеств равномерно ограничены.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны и G — открытое множество на ней с границей γ , принадлежащей поверхности. Пусть сферические изображения G и γ не пересекаются.

Тогда, если последовательность регулярных поверхностей F_n с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами сходится к F вместе со сферическими изображениями, то каково бы ни было замкнутое множество $H \subset G$ и число $\varepsilon > 0$, существует открытое множество G^* , содержащее H и содержащееся в G , такое, что найдутся сколь угодно большие n , для которых

$$\begin{aligned} |\sigma(G^*) - \sigma(G^{*n})| &< \varepsilon \\ |\omega(G^*) - \omega(G^{*n})| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство. Построим последовательность открытых множеств G_k по лемме 1. По лемме 2 найдется такое G_{k_1} , что для бесконечного множества значений n

$$|\sigma(G_{k_1}) - \sigma(G_{k_1}^n)| < \varepsilon.$$

Если G_{k_1} опустить в последовательности G_k , то найдется второе множество G_{k_2} и т. д. Одним словом, существует бесконечное число множеств G_{k_s} , обладающих этим свойством. Среди множеств G_{k_s} по лемме 3 найдется такое, что для бесконечного множества значений n будет

$$\begin{aligned} |\sigma(G_{k_s}) - \sigma(G_{k_s}^n)| &< \varepsilon, \\ |\omega(G_{k_s}) - \omega(G_{k_s}^n)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Множество G_{k_s} и есть то открытое множество G^* , существование которого утверждается леммой.

Лемма доказана.

§ 3. Связь между внутренней и внешней кривизной поверхности. Теорема Гаусса

Для случая регулярных поверхностей теорема Гаусса о сферическом изображении, как известно, устанавли-

вает связь между интегральной кривизной произвольной области на поверхности и площадью ее сферического изображения. В настоящем параграфе будет доказана соответствующая теорема для поверхностей ограниченной внешней кривизны.

Согласно теореме о приближении (§ 4, гл. 3) для поверхности F ограниченной внешней кривизны можно построить последовательность аналитических поверхностей F_n , сходящихся к F в окрестности U произвольной точки X с положительными кривизнами, слабо сходящимися к положительной кривизне F в этой окрестности.

Как показано в первом параграфе настоящей главы, окрестность U можно выбрать так, что абсолютные кривизны областей U_n на поверхностях F_n будут равномерно ограничены. А тогда по теореме А. Д. Александрова из последовательности F_n можно выделить подпоследовательность F_{n_k} такую, что полные внутренние кривизны поверхностей F_{n_k} в U_{n_k} будут слабо сходиться к полной внутренней кривизне F в U .

Лемма 1. Пусть G — малая область на поверхности F ограниченной внешней кривизны, γ — ее граница, $\tilde{\gamma}$ — сферическое изображение γ и $\tilde{\gamma}$ — его полный прообраз в G .

Тогда полная внутренняя и полная внешняя кривизны открытого множества $G - \tilde{\gamma}$ равны.

Доказательство. Пусть H — замкнутое множество в $G - \tilde{\gamma}$, удовлетворяющее условиям

$$|\sigma^0(G - \tilde{\gamma}) - \sigma^0(H)| < \varepsilon,$$

$$|\omega^0(G - \tilde{\gamma}) - \omega^0(H)| < \varepsilon,$$

где ε — любое положительное число.

Построим последовательность аналитических поверхностей F_n с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами, сходящихся к F вместе со сферическими изображениями. По лемме 4 предыдущего параграфа существует открытое множество G^* , содержащееся в $G - \tilde{\gamma}$ и содержащее H такое, что

$$|\sigma(G^*) - \sigma(G^{n*})| < \varepsilon$$

$$|\omega(G^*) - \omega(G^{n*})| < \varepsilon.$$

По выбору H

$$|\sigma(G^*) - \sigma(G - \tilde{\gamma})| < \varepsilon$$

$$|\omega(G^*) - \omega(G - \tilde{\gamma})| < \varepsilon.$$

Так как на поверхности F_n в силу теоремы Гаусса

$$\sigma(G^{n*}) = \omega(G^{n*}),$$

то из полученных выше четырех неравенств немедленно заключаем:

$$|\sigma(G - \tilde{\gamma}) - \omega(G - \tilde{\gamma})| < 4\varepsilon.$$

А так как ε произвольно, то

$$\sigma(G - \tilde{\gamma}) = \omega(G - \tilde{\gamma}).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть площадь сферического изображения границы γ открытого множества G равна нулю.

Тогда

$$\omega(G) \leq \sigma(G).$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\gamma}$ — полный прообраз сферического изображения γ . По лемме 1

$$\sigma(G - \tilde{\gamma}) = \omega(G - \tilde{\gamma}),$$

но

$$\sigma(G - \tilde{\gamma}) = \sigma(G).$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$\omega(G) \leq \omega(G - \tilde{\gamma}).$$

Пусть $\delta\tilde{\gamma} - \delta$ — окрестность множества $\tilde{\gamma}$. Соответствующие множества на поверхностях F_n , сходящихся к данной (§ 4, гл. 3), имеют сколь угодно малые положительные кривизны, если достаточно мало δ . Поэтому положительная внутренняя кривизна предельной поверхности на множестве $\delta\tilde{\gamma}$ мала, если мало δ . Следовательно,

полная внутренняя кривизна множества $G \cap \tilde{\gamma}$ не положительна и в силу полной аддитивности ω

$$\omega(G) \leq \omega(G - \tilde{\gamma}).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любого борелевского множества H на поверхности ограниченной внешней кривизны*

$$\omega(H) \leq \sigma(H).$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение леммы для любого открытого множества G . Леммой 2 это установлено только для достаточно малых открытых множеств, так как при этом мы пользовались регулярным приближением поверхности, которое получено лишь для достаточно малых кусков поверхности.

Возьмем в G замкнутое множество F такое, чтобы абсолютная внутренняя и абсолютная внешняя кривизны $G - F$ были меньше ε . Разобьем пространство на малые кубы плоскостями, параллельными координатным плоскостям, так, чтобы абсолютная внутренняя и внешняя кривизна множества точек поверхности, лежащих на плоскостях разбиения, была равна нулю. Это легко осуществимо благодаря ограниченности и полной аддитивности абсолютных кривизн.

Если кубы достаточно малы, то к каждому куску поверхности, содержащемуся внутри одного куба, применима лемма 2.

Пусть G^* состоит из тех кусков поверхности разбиения ее кубами, каждый из которых содержит точки F . Очевидно, если стороны кубов малы, то $F \subset G^* \subset G$. Из полной аддитивности полных кривизн и леммы 2 заключаем:

$$\omega(G^*) \leq \sigma(G^*).$$

И так как

$$|\omega(G) - \omega(G^*)| < \varepsilon,$$

$$|\sigma(G) - \sigma(G^*)| < \varepsilon,$$

а ε произвольно, то

$$\omega(G) \leq \sigma(G).$$

То, что это неравенство имеет место для любого борелевского множества, а не только для открытого,

следует из общих теорем об аддитивных функциях множеств.

Лемма доказана.

Лемма 4. Если для борелевского множества H на поверхности ограниченной внешней кривизны

$$\omega(H) = \sigma(H),$$

то для любого его борелевского подмножества H

$$\omega(H') = \sigma(H').$$

Действительно, по лемме 3

$$\begin{aligned}\omega(H') &\leq \sigma(H'), \\ \omega(H - H') &\leq \sigma(H - H').\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание аддитивность функций ω , σ и равенство

$$\omega(H) = \sigma(H),$$

заключаем:

$$\omega(H') = \sigma(H').$$

Теорема 1. Каждая регулярная точка X поверхности ограниченной внешней кривизны имеет окрестность такую, что для любого борелевского множества H из этой окрестности

$$\omega(H) = \sigma(H).$$

Доказательство. Так как точка X регулярная, то она имеет окрестность G такую, что ни в G , ни на ее границе γ нет точек с касательными плоскостями, параллельными касательной плоскости в X . Пусть $\tilde{\gamma}$ — сферическое изображение границы G и $\tilde{\gamma}$ — его полный прообраз на поверхности. Открытое множество $G - \tilde{\gamma}$ содержит точку X и, следовательно, является окрестностью этой точки.

По лемме 1

$$\omega(G - \tilde{\gamma}) = \sigma(G - \tilde{\gamma}).$$

А тогда по лемме 4 для любого борелевского множества $H \subset G - \tilde{\gamma}$

$$\omega(H) = \sigma(H).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. На поверхности ограниченной внешней кривизны существует открытое множество G , содержащее все регулярные точки, такое, что для любого его борелевского подмножества H

$$\omega(H) = \sigma(H).$$

В частности, если поверхность квазирегулярна, т. е. все точки поверхности регулярны, то это имеет место для любого H .

Доказательство. Пусть $G(X)$ — окрестность регулярной точки X , существование которой гарантируется теоремой 1. Положим,

$$G = \sum_{(X)} G(X),$$

где суммирование по всем регулярным точкам поверхности. Среди окрестностей $G(X)$ существует счетное множество таких, которые покрывают все G . Пусть $G_1, G_2, \dots, G_n$ — эти окрестности и H — любое борелевское множество, принадлежащее G . Положим,

$$H_k = H \cap (G_k - G_{k-1} - \dots - G_1).$$

Очевидно,

$$H_k \subset G_k \quad \text{и} \quad \sum_1^{\infty} H_k = H.$$

В силу теоремы 1 и полной аддитивности ω и σ

$$\omega(H) = \sigma(H).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Для любого борелевского множества H на замкнутой поверхности ограниченной внешней кривизны

$$\omega(H) = \sigma(H).$$

Доказательство. Полная внутренняя и полная внешняя кривизны замкнутой поверхности ограниченной внешней кривизны равны $\pi\chi$, где χ — эйлерова характеристика поверхности (§ 1, гл. 2; § 1, гл. 4). По лемме 4 отсюда следует, что равенство полной внутренней и полной внешней кривизны имеет место для любого борелевского множества на поверхности.

Теорема доказана.

Теорема 4. На поверхности F ограниченной внешней кривизны для любого борелевского множества H

$$\omega^+(H) = \sigma^+(H)$$

$$\omega^-(H) \geq \sigma^-(H).$$

Доказательство. Пусть E — множество эллиптических точек поверхности. Тогда $\omega^+(F - E) = 0$. В самом деле, если бы это было не так, то нашлось бы множество $M \subset F - E$, для которого $\omega(M) > 0$, но это невозможно, так как $\sigma(M) = 0$, а $\omega(M) \leq \sigma(M)$.

С другой стороны, $\omega^-(E) = 0$, так как в противном случае нашлось бы в E такое множество N , для которого $\omega^-(N) < 0$. Но так как $N \subset E$, то $\omega(N) = \sigma(N) > 0$.

А теперь

$$\sigma^+(F) = \sigma(E) = \omega(E) = \omega^+(F).$$

По лемме 4 отсюда получаем для любого H :

$$\sigma^+(H) = \omega^+(H).$$

А так как

$$\sigma(H) \geq \omega(H),$$

то

$$\omega^-(H) \leq \sigma^-(H).$$

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны и X — произвольная точка на ней. Тогда существует окрестность U точки X и бесконечная последовательность аналитических поверхностей F_n такие, что:

1. Поверхности F_n сходятся к F в U вместе со сферическими изображениями.

2. Положительные внешние кривизны F_n слабо сходятся к положительным внешним кривизнам F в U .

3. Положительные, отрицательные и полные внутренние кривизны F_n слабо сходятся к соответствующим кривизнам F в U .

Если точка X регулярная, то отрицательные и полные внешние кривизны F_n также слабо сходятся к соответствующим кривизнам F в U .

Доказательство. По доказанному ранее можно считать, что последовательность F_n обладает свойствами

1 и 2, а также имеет место слабая сходимость полных внутренних кривизн F_n к полной внутренней кривизне F .

По теореме 4 для F_n должна иметь место слабая сходимость и положительных внутренних кривизн, а следовательно, и отрицательных внутренних кривизн (так как полные и положительные кривизны слабо сходятся).

По тем же соображениям в случае регулярной точки X отрицательные и полные внешние кривизны F_n должны сходиться к соответствующим кривизнам F .

Теорема доказана.

§ 4. Поверхности неотрицательной внутренней и ограниченной внешней кривизны

В этом параграфе мы рассмотрим поверхности с неотрицательной внутренней и ограниченной внешней кривизной.

Начнем с поверхностей нулевой внутренней кривизны, т. е. поверхностей, у которых положительная и отрицательная внутренние кривизны равны нулю. На такой поверхности не может быть ни эллиптических, ни гиперболических точек.

Действительно, если на поверхности есть гиперболическая точка, то отрицательная внешняя кривизна поверхности отлична от нуля. Следовательно, на поверхности существует бесчисленное множество гиперболических точек, причем площадь их сферического изображения отлична от нуля.

На множестве гиперболических точек поверхности имеет место равенство полной внутренней и полной внешней кривизны. И так как внешняя кривизна заведомо отрицательна, то и внутренняя отрицательна. Но это невозможно, так как полная кривизна на любом множестве точек поверхности должна быть равна нулю. Таким образом, на поверхности с нулевой внутренней кривизной не может быть гиперболических точек.

Аналогично устанавливается, что на поверхности с нулевой внутренней кривизной не может быть эллиптических точек. Поэтому положительная и отрицательная внешние кривизны такой поверхности равны нулю. Отсюда с помощью теорем 1, 2, § 3, гл. 2, получаем:

Теорема 1. *Поверхность ограниченной внешней и нулевой внутренней кривизны развертывающаяся (т. е. локально изометрична плоскости). Она имеет обычное для регулярных развертывающихся поверхностей строение с прямолинейными образующими и стационарной касательной плоскостью вдоль каждой образующей.*

Теорема 2. *Полная поверхность с нулевой внутренней и ограниченной внешней кривизной — цилиндрическая.*

Рассмотрим теперь поверхности, у которых положительная внутренняя кривизна отлична от нуля, а отрицательная равна нулю. На такой поверхности не может быть гиперболических точек. Доказывается это дословно такими же рассуждениями, как и в случае поверхностей нулевой кривизны.

Таким образом, поверхности неотрицательной внутренней кривизны являются также поверхностями неотрицательной внешней кривизны. Поэтому для них имеют место соответствующие теоремы (§ 4, гл. 2).

Теорема 3. *Поверхность с неотрицательной (не равной нулю) внутренней и ограниченной внешней кривизной с краем, лежащим в плоскости, есть выпуклая поверхность, т. е. является областью на границе выпуклого тела.*

Теорема 4. *Полная поверхность с ограниченной внешней кривизной и неотрицательной внутренней кривизной (не равной нулю) есть либо замкнутая выпуклая поверхность, либо бесконечная выпуклая поверхность.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Ефимов. Изгибание поверхностей в малом. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 30, 1950 г.
 2. А. С. Кронрод. О функциях двух переменных. Успехи математических наук, т. 5, вып. 1, 1950 г.
 3. А. Д. Александров. Основы внутренней геометрии поверхностей. Доклады АН СССР т. 60, № 9, 1948 г.
 4. Z. Nash. C. isometric imbeddings. Ann. of Math. vol. 60. N 3, 1954 г.
-

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Введение	3
Глава первая. Непрерывные отображения ограниченной вариации	9
§ 1. Абсолютная вариация непрерывного отображения	9
§ 2. Функция кратности непрерывного отображения	15
§ 3. Индекс точки относительно непрерывного отображения	24
§ 4. Положительная, отрицательная и полная вариация непрерывного отображения	31
Глава вторая. Гладкие поверхности ограниченной внешней кривизны	37
§ 1. Внешняя кривизна гладкой поверхности. Классификация точек поверхности	37
§ 2. Некоторые вспомогательные предложения	46
§ 3. Поверхности нулевой внешней кривизны	55
§ 4. Поверхности с неотрицательной внешней кривизной	68
Глава третья. Приближение поверхности ограниченной внешней кривизны регулярными поверхностями	74
§ 1. О кратчайших в замкнутой области на плоскости. Нитяная поверхность	74
§ 2. Специальное сглаживание нитяной поверхности	83
§ 3. О прямолинейных образующих гладкой поверхности	90
§ 4. Приближение поверхностей ограниченной внешней кривизны регулярными поверхностями	97
Глава четвертая. О внутренней кривизне поверхностей ограниченной внешней кривизны	105
§ 1. Поверхности ограниченной внешней кривизны как многообразия ограниченной внутренней кривизны	105
§ 2. Вспомогательные предложения	113
§ 3. Связь между внутренней и внешней кривизной поверхности. Теорема Гаусса	119
§ 4. Поверхности неотрицательной внутренней и ограниченной внешней кривизны	126
Цитированная литература	127

Алексей Васильевич ПОГОРЕЛОВ

ПОВЕРХНОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ

Цена 3 руб. 25 коп.

32

